

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería Aeroespacial

Continuación Numérica de Soluciones Periódicas en Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos

Autor: Antonio José Aguilera Albendín

Tutor: Enrique Ponce Nuñez

Dep. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Continuación Numérica de Soluciones Periódicas en Sistemas Tridimensionales Lineales a Trozos

Autor:

Antonio José Aguilera Albendín

Tutor:

Enrique Ponce Nuñez

Catedrático

Dep. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Continuación Numérica de Soluciones Periódicas en Sistemas Tridimensionales
Lineales a Trozos

Autor: Antonio José Aguilera Albendín

Tutor: Enrique Ponce Nuñez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial:
Continuación Numérica de Soluciones
Periódicas en Sistemas Tridimensionales
Lineales a Trozos

Antonio José Aguilera Albendín

10 de julio de 2017

Índice general

1. Introducción	9
2. Sistemas dinámicos	11
2.1. Introducción a los sistemas dinámicos	11
2.2. Ciclos límites	12
2.3. Estabilidad	13
2.3.1. Estabilidad estructural	13
2.3.2. Estabilidad de bifurcaciones frente a perturbaciones . .	14
2.4. Bifurcaciones	14
2.4.1. Bifurcaciones locales	14
2.4.2. Bifurcaciones globales	20
2.5. Osciladores electrónicos	26
2.5.1. Osciladores y ciclos límites	26
2.5.2. Circuitos electrónicos no lineales	26
2.5.3. Circuitos electrónicos lineales a trozos	26
3. Análisis del sistema dinámico	29
3.1. Descripción del sistema	29
3.2. Análisis del sistema dinámico	31
3.3. Análisis de órbitas periódicas mediante ecuaciones de cierre . .	38
3.3.1. Órbitas periódicas bizonales	38
3.3.2. Órbitas periódicas trizonales	40
3.4. Continuación	42
3.4.1. Continuación paramétrica natural	42
3.4.2. Método de pseudo longitud de arco de Keller	43
3.4.3. Algoritmo utilizado en el Método de pseudo longitud de arco de Keller	44

4. Oscilador electrónico BVP	49
4.1. Obtención del sistema modelado del oscilador electrónico BVP	49
4.2. Estudios de equilibrios (estabilidad)	53
4.2.1. Soluciones de equilibrio	53
4.2.2. Estabilidad del origen	54
4.2.3. Estabilidad de los equilibrios de la zona externa	55
4.2.4. Zona correspondiente a tres equilibrios	56
4.3. Estudio de bifurcaciones	58
4.3.1. Bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite	58
4.3.2. Bifurcación Hopf del infinito	59
4.3.3. Hopf Zero del Origen	61
4.3.4. Hopf Zero del Infinito	62
4.3.5. Triple zero del origen	62
4.3.6. Triple zero de los equilibrios de la zona externa	63
4.4. Análisis de bifurcaciones	64
5. Continuación numérica en oscilador BVP	69
5.1. Continuación numérica de ciclos límites trizonales	71
5.1.1. Curvas Silla-Nodo correspondientes a ciclos límites tri- zonales	71
5.2. Continuación numérica de ciclos límite bizonales	79
5.2.1. Curvas Silla-Nodo correspondientes a ciclos límite bi- zonales	79
5.2.2. Curva Duplicación de Periodo correspondiente a ciclos límite bizonales	89
5.2.3. Curva Bifurcación Toro correspondiente a ciclos límite bizonales	91
5.3. Análisis de las curvas de continuación numérica obtenidas . . .	94

Índice de figuras

2.1. Ciclo Límite estable	12
2.2. Ciclo Límite inestable	13
2.3. Soluciones Bifurcación Silla-Nodo	15
2.4. Diagrama bifurcación Silla-Nodo	16
2.5. Bifurcación Pitchfork	17
2.6. Bifurcación Pitchfork Supercrítica	18
2.7. Bifurcación Hopf	18
2.8. Bifurcación Hopf Supercrítica	19
2.9. Bifurcación Hopf Subcrítica	20
2.10. Planos de fase de la bifurcación Silla-Nodo	21
2.11. Diagrama bifurcación Silla-Nodo	22
2.12. Bifurcación Silla-Nodo de Ciclos Límites	22
2.13. Planos de fase de una bifurcación homoclina	23
2.14. Bifurcación Toro	23
2.15. Bifurcación Neimar-Sacker de Ciclos Límites	24
2.16. Atractor Sistema de Lorenz	25
2.17. Bifurcación Flip de Ciclos Límites	25
3.1. Diagrama Bifurcación Pitchfork	33
3.2. Órbitas periódicas centrales	34
3.3. Ciclo límite bizonal en el plano frontera $x = 1$	38
3.4. Ciclo límite trizonal en los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$	40
3.5. Continuación paramétrica natural	42
3.6. Método de Keller	44
3.7. Método de Newton	45
3.8. Cálculo de V_0	45
3.9. Cálculo del vector “predicción”	46
3.10. Cálculo de X_1	47

4.1. Oscilador BVP	49
4.2. Conductancia lineal a trozos	50
4.3. Estabilidad del Origen	55
4.4. Estabilidad de los equilibrios no triviales	56
4.5. Existencia de tres equilibrios	57
4.6. Curva Bifurcación FCCL y Ciclos Límites	59
4.7. Curva Bifurcación Hopf del infinito y Ciclos Límites	60
4.8. Bifurcación Hopf Zero del Origen	61
4.9. Bifurcación Hopf Zero del Infinito	62
4.10. Diagrama de bifurcaciones	64
4.11. Diagrama de bifurcaciones extendido	66
4.12. Bifurcaciones Hopf-zero y FCCL en plano superficie	67
5.1. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.9$	72
5.2. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.9$	72
5.3. Ciclos Límites Trizionales para $\alpha=0.9$	73
5.4. Continuación Numérica Ciclo Límite Trizonal	74
5.5. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.9$	74
5.6. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.9$	75
5.7. Ciclos Límites Trizionales para $\alpha=0.9$	75
5.8. Continuación Numérica Ciclo Límite Trizonal	76
5.9. Tiempo de vuelo central en Triple Zero del Origen	77
5.10. Tiempo de vuelo externo en Triple Zero del Origen	77
5.11. Ciclos Límites Trizionales en Triple Zero del Origen	78
5.12. Continuación Numérica Ciclo Límite Trizonal	79
5.13. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.85$	80
5.14. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.85$	80
5.15. Ciclos Límites Bizionales para $\alpha=0.85$	81
5.16. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.9$	82
5.17. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.9$	82
5.18. Ciclos Límites Bizionales para $\alpha=0.9$	83
5.19. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.95$	84
5.20. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.95$	84
5.21. Ciclos Límites Bizionales para $\alpha=0.95$	85
5.22. Continuación Numérica Ciclo Límite Bizonal	86
5.23. Tiempo de vuelo central para $\alpha=0.9$	86
5.24. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=0.9$	87
5.25. Ciclos Límites Bizionales para $\alpha=0.9$	88

5.26. Continuación Numérica Ciclo Límite Bizonal	88
5.27. Tiempo de vuelo central para $\alpha=1.2$	89
5.28. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=1.2$	90
5.29. Ciclos Límites Bizionales para $\alpha=1.2$	90
5.30. Continuación Numérica Duplicación de Periodo	91
5.31. Tiempo de vuelo central para $\alpha=1.1$	92
5.32. Tiempo de vuelo externo para $\alpha=1.1$	92
5.33. Ciclos Límites para $\alpha=1.1$	93
5.34. Continuación Numérica Bifurcación Toro	93
5.35. Diagrama de Bifurcaciones ampliado	94
5.36. Diagrama de Bifurcaciones ampliado	95
5.37. Diagrama de Bifurcaciones ampliado	96

Capítulo 1

Introducción

Este proyecto surge con el interés de estudiar el comportamiento de un sistema dinámico no lineal y poder analizar su comportamiento en función de las diferentes variables que modelan dicho sistema. El proyecto sigue el trabajo realizado por Carlos Vallet Burguillos en su Proyecto de Fin de Grado “Análisis de la dinámica de un oscilador electrónico tipo Bonhoeffer-Van der Pol”, tutelado por Javier Ros Padilla.

Para completar el análisis se partirá de una serie de valores fijos de los parámetros del oscilador y determinar mediante continuación numérica algunas de las curvas de bifurcación y ciclos límites del sistema. El método de continuación y las distintas simulaciones se llevarán a cabo mediante el software Mathematica, utilizando un código existente, realizado por los profesores E. García Medina y F. Fernández Sánchez.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

2.1. Introducción a los sistemas dinámicos

Los sistemas que pueden ser modelados mediante ecuaciones algebraicas no lineales o ecuaciones diferenciales no lineales son aquellos que son denominados sistemas no lineales. Ejemplos de dichos sistemas están presentes en muchas disciplinas de la ingeniería y de la ciencia. Estas ecuaciones lineales dependen de ciertos parámetros que representan los posibles valores de las magnitudes que rigen la dinámica del sistema. Por tanto, la elección de los valores de estos parámetros determina el comportamiento del sistema y los posibles estados de equilibrio del mismo, así como su respuesta ante pequeñas perturbaciones que puedan producirse.

Un sistema dinámico es aquel cuyo estado evoluciona con el tiempo t . Esta evolución está gobernada por una serie de reglas (no necesariamente ecuaciones) que especifica el estado del sistema tanto para valores continuos como discretos de t . Una evolución discreta en el tiempo es descrita normalmente mediante un sistema de ecuaciones algebraicas, mientras que una evolución continua en el tiempo es descrita mediante un sistema de ecuaciones diferenciales.

El comportamiento asintótico de un sistema dinámico cuando $t \rightarrow \infty$ es llamado el estado estacionario del sistema. A menudo, este estado estacionario puede corresponder a un conjunto delimitado, el cual puede tener tanto una solución estática como dinámica. El comportamiento del sistema dinámico antes de alcanzar el estado estacionario es denominado estado transitorio, y consecuentemente, la correspondiente solución del sistema dinámico es llama-

mada solución transitoria.

La solución de un sistema dinámico puede ser tanto constante en el tiempo como variante. Puntos fijos, soluciones de equilibrio y soluciones estacionarias son otros nombres para las soluciones constantes, mientras que las soluciones dinámicas es otro nombre para las soluciones variantes en el tiempo.

2.2. Ciclos límites

En los sistemas no lineales existen soluciones periódicas que se caracterizan por tener estados invariantes en el tiempo. La solución periódica es una respuesta dinámica caracterizada por una frecuencia básica F . Matemáticamente, la solución $x(t)$ es periódica para todo tiempo t , si existe algún T que satisfaga: $x(t + T) = x(t)$ $0 < t < T$.

A una solución periódica se le llama ciclo límite si no existen otras soluciones periódicas cercanas a ella (es decir que se encuentra aislada). De forma similar a los puntos de equilibrio, los ciclos límites pueden ser estables o inestables.

Un ciclo límite es asintóticamente estable si todas las órbitas, comenzando cerca de éste, alcanzan el ciclo límite conforme el tiempo incrementa. Un ejemplo claro es la figura 2.1 donde se ve que las órbitas convergen al ciclo límite estable.

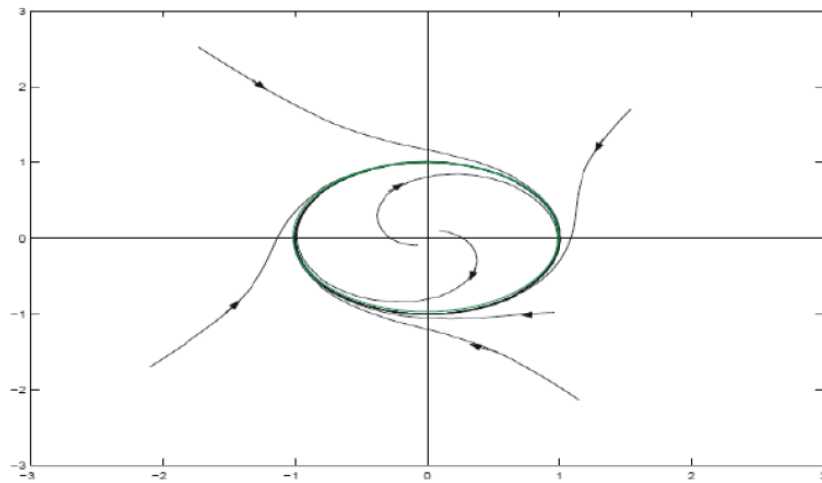


Figura 2.1: *Ciclo límite estable.*

Un ciclo límite es inestable si todas las órbitas comenzando cerca de éste, se alejan o divergen del mismo. Esto se muestra en la figura 2.2 donde se muestra como se alejan las órbitas.

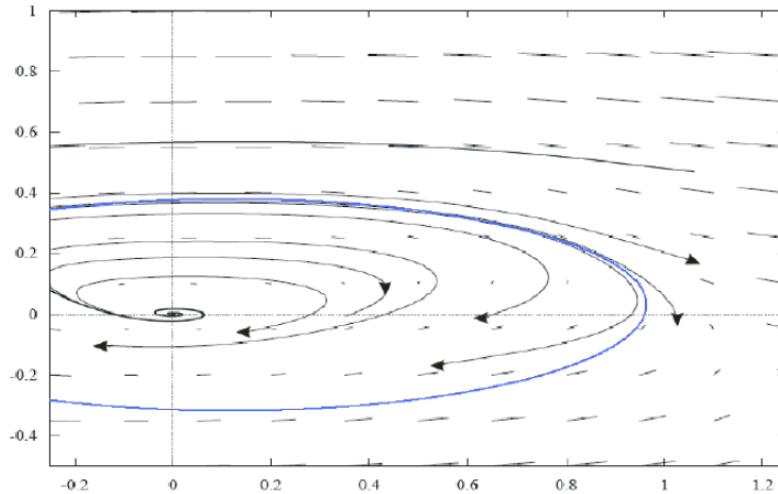


Figura 2.2: *Ciclo límite inestable.*

2.3. Estabilidad

2.3.1. Estabilidad estructural

Nuestro sistema a estudiar está sujeto a pequeñas perturbaciones, lo cual hace necesario estudiar la estabilidad de la estructura orbital de dicho sistema dinámico. Por estructura orbital entendemos las diferentes órbitas del sistema considerado y su estabilidad para un conjunto de valores para los diferentes parámetros que definen dicho sistema.

El Teorema de Hartman-Grobman establece que un campo vectorial es estructuralmente estable en la proximidad de puntos hiperbólicos fijos. Por otro lado, en la proximidad de un punto de bifurcación, la estructura orbital es inestable y el campo vectorial asociado es estructuralmente inestable.

2.3.2. Estabilidad de bifurcaciones frente a perturbaciones

Una bifurcación es estable frente a una perturbación si no hay diferencias cualitativas entre el diagrama de bifurcaciones en el sistema perturbado y en el sistema no perturbado

2.4. Bifurcaciones

El concepto bifurcación es utilizado para indicar un cambio cualitativo en las características de un sistema. Estos cambios cualitativos están asociados al cambio en el número, tipo y estabilidad de los puntos de equilibrio u órbitas periódicas del sistema, bajo la variación de uno o más parámetros de los que depende el sistema.

Las bifurcaciones se pueden considerar locales o globales. Se considera como locales aquellas en las que el cambio cualitativo ocurre en la proximidad de un punto fijo de una solución periódica del sistema. Cualquier otro cambio cualitativo es considerado como bifurcación global.

En problemas de bifurcaciones es útil considerar un espacio formado por las variables de estado y los parámetros de control, llamado espacio estado-control. En este espacio, los puntos en los que se producen las bifurcaciones son llamados puntos de bifurcación. Muchas ramas de similares y/o diferentes soluciones se unen o emergen de puntos locales de bifurcación. Una bifurcación que requiere al menos m parámetros de control para que se produzca es llamada bifurcación de dimensión m . A menos que se indique lo contrario, debe entenderse que los parámetros de control son modificados muy lentamente para que sus valores instantáneos puedan ser considerados constantes.

2.4.1. Bifurcaciones locales

Supongamos que uno o más parámetros de control son lentamente modificados, un punto fijo se convierte en no hiperbólico en un cierto punto del espacio estado-control. Entonces, si el cambio antes y después de este punto del espacio de estados es cualitativo, a este punto lo consideramos como punto de bifurcación.

Un punto fijo puede perder estabilidad debido a una de las siguientes bifurcaciones: bifurcación silla-nodo, bifurcación pitchfork, bifurcación trans-

crítica y bifurcación Hopf. Las bifurcaciones silla-nodo, pitchfork y transcriticals son clasificadas como bifurcaciones estáticas, debido a que a ellas sólo convergen las soluciones asociadas a puntos de equilibrio, es decir, soluciones estáticas. En cambio, en la bifurcación Hopf convergen tanto las soluciones correspondientes a puntos fijos y soluciones periódicas, por lo que esta bifurcación es clasificada como bifurcación dinámica.

Bifurcación Silla-Nodo

Este tipo de bifurcación se produce debido a la aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme varía el parámetro de control. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \lambda) = -\lambda - \mathbf{x}^2, \quad (2.1)$$

donde λ es un escalar que hace de parámetro de control. Las soluciones de este sistema se muestran en la figura 2.3:

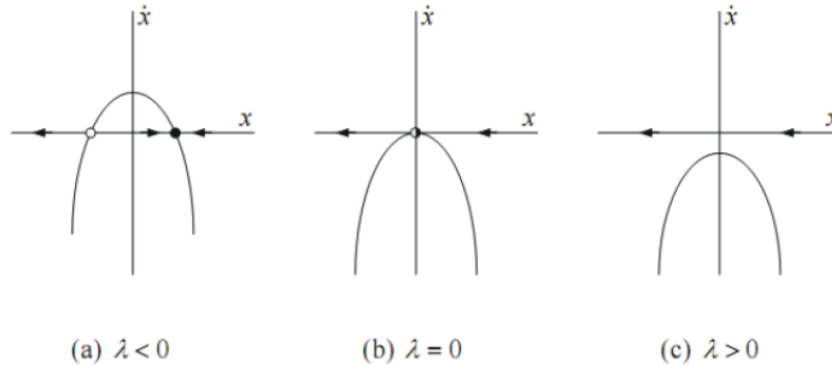


Figura 2.3: Las gráficas corresponden a las soluciones del sistema para los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, respectivamente.

En este caso tenemos un espacio bidimensional. Para $\lambda < 0$ existen dos puntos de equilibrio en el sistema, uno estable y otro inestable. Cuando el parámetro λ se anula los puntos estable e inestable chocan y se produce el punto de bifurcación Silla-Nodo, en el cual el Jacobiano del sistema se vuelve singular $J(x^*) = 0$, y no es posible obtener una solución de la ecuación $-x^2 - \lambda = 0$. Por último, para el caso $\lambda > 0$, no existen puntos de equilibrio.

La respuesta del sistema es mostrada en la figura 2.4: en la que se ha re-

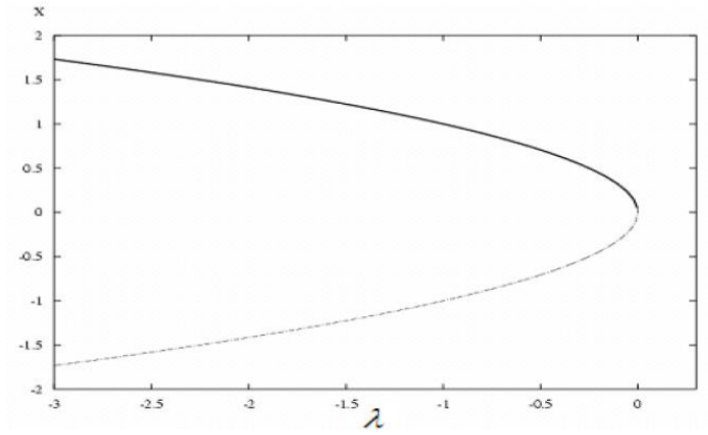


Figura 2.4: *Diagrama bifurcación Silla-Nodo.*

presentado en trazo continuo los puntos estables y con línea discontinua los puntos inestables. Este tipo de bifurcaciones existe siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

$$f(x, \lambda) = 0; \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} = 0; \frac{\partial f}{\partial \lambda} \neq 0; \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x^*} = 0$$

La primera ecuación implica que la solución es un punto de equilibrio y la segunda que es un punto no hiperbólico. La tercera ecuación significa que coexiste en el punto de bifurcación (x^*, λ) una función continua diferenciable $h(x)$ que intersecta a la línea $x = x^*$ de manera transversal. Por último, la cuarta ecuación indica que el punto de equilibrio permanece de manera local a un lado de la línea $\lambda = \lambda_0$. Estas dos últimas ecuaciones se les denomina condiciones de transversalidad.

Bifurcación Pitchfork

En este tipo de bifurcación, conforme se varía el parámetro de control un punto de equilibrio estable se convierte en inestable, y simultáneamente se originan dos puntos de equilibrios estables. De esta forma podemos decir que la bifurcación se asemeja a un “tridente”. Esta bifurcación puede ser de dos tipos: subcrítica y supercrítica.

La bifurcación supercrítica está relacionada con la creación de dos puntos de equilibrio estables a partir de otro que se volvió inestable conforme varía el parámetro de control λ , tal y como se puede ver en la figura 2.5: Para el

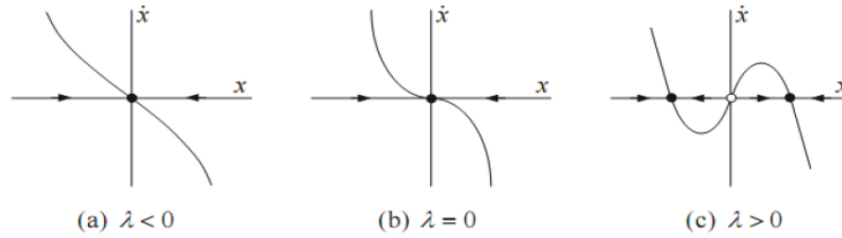


Figura 2.5: Creación de dos puntos fijos estables a partir de uno inestable.

caso $\lambda < 0$, sólo existe un punto de equilibrio estable. Cuando λ se anula, este punto es críticamente estable debido a que la linealización desaparece, aún así sigue siendo estable. Para el caso que $\lambda > 0$, el punto de equilibrio estable se convierte en inestable y se obtienen dos puntos estables simétricos. Un ejemplo de un sistema en el que se produzca este tipo de bifurcación es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \lambda) = \lambda \mathbf{x} - \mathbf{x}^3, \quad (2.2)$$

En la figura 2.6 podemos ver la respuesta del sistema en función del parámetro de control λ :

en la que se ha representado en trazo continuo y grueso los puntos estables y en línea discontinua los puntos inestables. Se puede observar que para $\lambda < 0$, el punto de equilibrio es inestable. Por el contrario, para $\lambda > 0$, el punto de equilibrio se vuelve inestable y aparecen dos puntos estables de forma simétrica.

Bifurcación Hopf

Este tipo de bifurcación involucra a un punto de equilibrio y a un ciclo límite. La bifurcación se produce debido al cruce de dos autovalores complejos con el eje imaginario. Dicha condición la podemos ver en la figura 2.7:

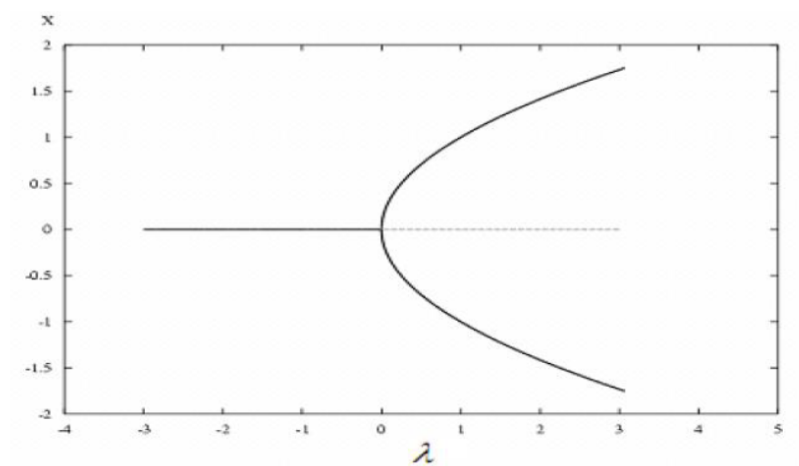


Figura 2.6: *Bifurcación Pitchfork Supercrítica.*

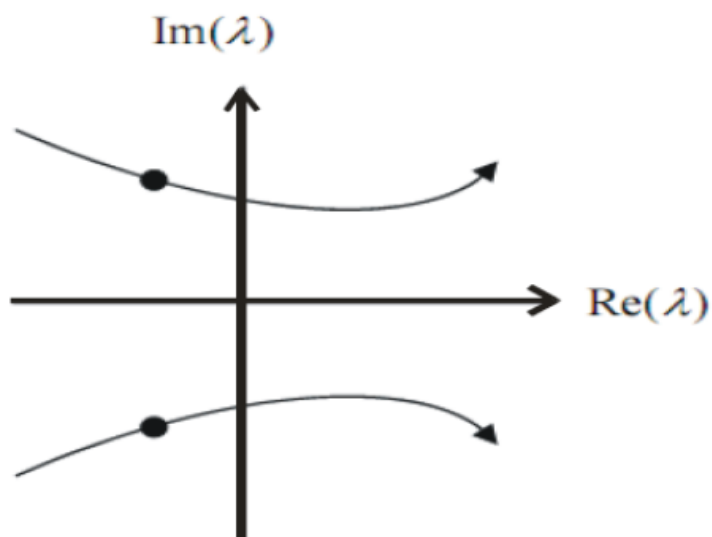


Figura 2.7: *Cruce de los autovalores complejos por el eje imaginario en la bifurcación Hopf.*

Para que se produzca una bifurcación Hopf, se deben dar dos condiciones matemáticas:

1. El jacobiano tiene un par de autovalores imaginarios puros en el va-

lor crítico de bifurcación $\gamma(\lambda_b) = \alpha(\lambda_b) \pm j\omega(\lambda_b)$, entonces: $\alpha(\lambda_b) = 0$ y $\omega(\lambda_b) > 0$.

2. Condición de transversalidad $\frac{dRe\{\gamma(\lambda)\}}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_b} = \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_b} \neq 0$.

La primera condición indica que se trata de un punto no hiperbólico. La segunda indica el cruce de los autovalores conjugados hacia la parte derecha del plano complejo. La importancia de este tipo de bifurcaciones reside en el hecho de que una vez que cambia la estabilidad del punto de equilibrio, se origina una órbita periódica (o ciclo límite) de pequeña amplitud al variar el parámetro de control λ . Al seguir variando λ , las variables que determinan el estado del sistema oscilarán de manera estable o inestable, dependiendo de que la bifurcación sea Supercrítica o Subcrítica.

Para el caso de que la bifurcación sea supercrítica, ésta se produce cuando el punto de equilibrio pierde estabilidad y se convierte en un ciclo límite estable para valores mayores que el punto de bifurcación. En la figura 2.8 se muestran los planos de fase característicos de este tipo de bifurcaciones.

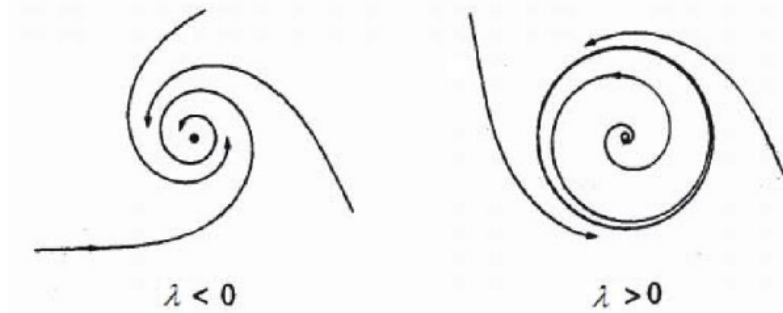


Figura 2.8: Planos de fase de la bifurcación Hopf Supercrítica.

Las bifurcaciones subcríticas aparecen cuando el punto de equilibrio estable se convierte en un ciclo límite inestable. Los planos de fase de estas bifurcaciones se pueden observar en la figura 2.9. Este tipo de bifurcación es muy peligrosa, ya que puede llevar al sistema a un comportamiento caótico conforme se varía el parámetro de control.

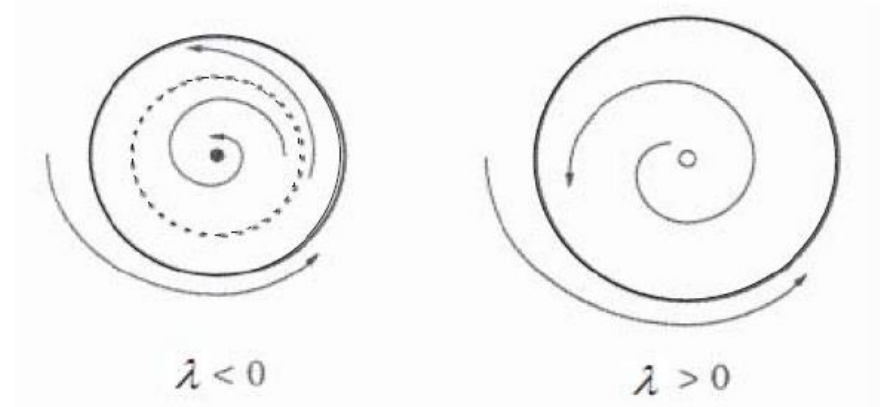


Figura 2.9: Planos de fase de la bifurcación Hopf Subcrítica.

Para sistemas lineales a trozos, la bifurcación análoga a la de Hopf la denominaremos bifurcación “Foco Centro Ciclo Límite” FCCL.

2.4.2. Bifurcaciones globales

Las bifurcaciones globales son bifurcaciones no locales. Están asociadas con cambios globales en el espacio de estados y pueden ocurrir al variar un parámetro de control. Para pasar del estado del sistema que precede a la bifurcación a la posterior a la bifurcación, es necesario un cambio global en las variables de estado.

Típicamente, en un punto de bifurcación global se encuentra una órbita homoclina o heteroclina. Llamamos a una bifurcación que conduce a la destrucción de una órbita homoclina (heteroclina) como bifurcación homoclina (heteroclina). Las bifurcaciones globales son de considerable interés debido a que pueden aparecer en la creación de órbitas caóticas.

Bifurcación Silla-Nodo de ciclos límites

Este tipo de bifurcación se produce debido a la destrucción de ciclos límites: un ciclo estable y otro inestable. En la figura 2.10 se ha representado los planos de fase de este tipo de bifurcación: Para valores del parámetro de bifurcación menores a λ_c existe un solo punto de equilibrio estable. Conforme el valor del parámetro de bifurcación va variando, llega un momento en el que

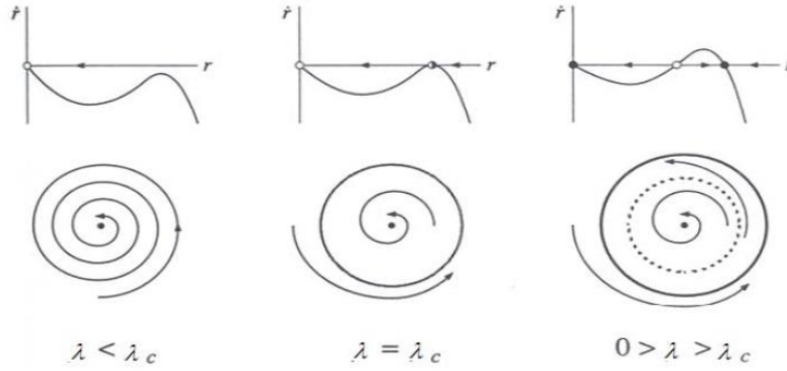


Figura 2.10: *Planos de fase de la bifurcación Silla-Nodo.*
 [Planos de fase de la bifurcación Silla-Nodo]

toma el valor crítico de bifurcación y se produce un ciclo límite semiestable. Finalmente, para el rango de valores comprendidos entre $0 < \lambda < \lambda_c$, del ciclo límite semiestable se originan dos ciclos límites, uno estable y otro inestable.

En la figura 2.11 se muestra el diagrama de bifurcación. En él se ha representado en trazo continuo los ciclos límites estables y en trazo discontinuo los ciclos límites inestables. Debido a que siempre existe un doble ciclo, cada uno con un distinto comportamiento, suele recibir el nombre de “pliegue” o “fold”.

Bifurcación Homoclina

Este tipo de bifurcación se produce cuando una órbita periódica se encuentra con un punto de equilibrio tipo silla. Una órbita homoclina es una trayectoria que une un punto de equilibrio tipo silla consigo mismo. Este tipo de órbitas se muestra en la figura 2.13 Si el parámetro de bifurcación cumple la condición $\lambda < \lambda_c$ sobre un espacio se genera una órbita estable que pasa muy cerca de un punto de equilibrio inestable sin llegar a él (Figura A). Al acercarse el parámetro de control al valor crítico λ_c sobre un espacio, la órbita se agranda cerca del punto de equilibrio Silla (Figura B). Sin embargo, si el parámetro toma el valor crítico $\lambda = \lambda_c$ sobre un espacio, la órbita llega al punto de Silla (Figura C) y se produce una órbita homoclina. Cuando el parámetro de control cumple la condición $\lambda > \lambda_c$, el ciclo límite desaparece (Figura D).

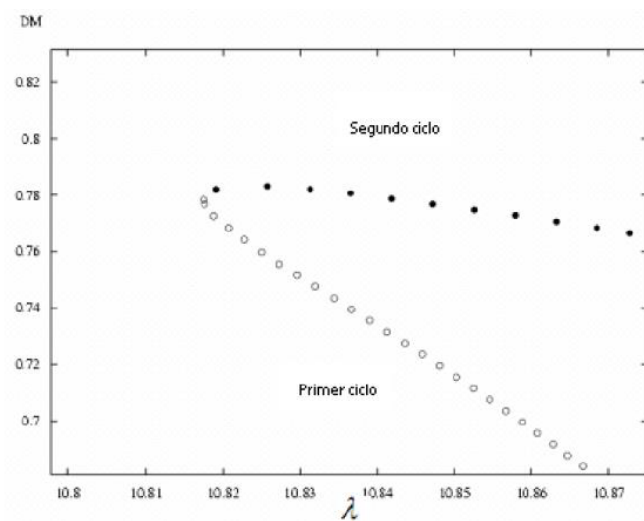


Figura 2.11: *Diagrama bifurcación Silla-Nodo*. Los círculos rellenos corresponden a respuestas periódicas estables, mientras que los círculos vacíos corresponden a periódicas inestables.

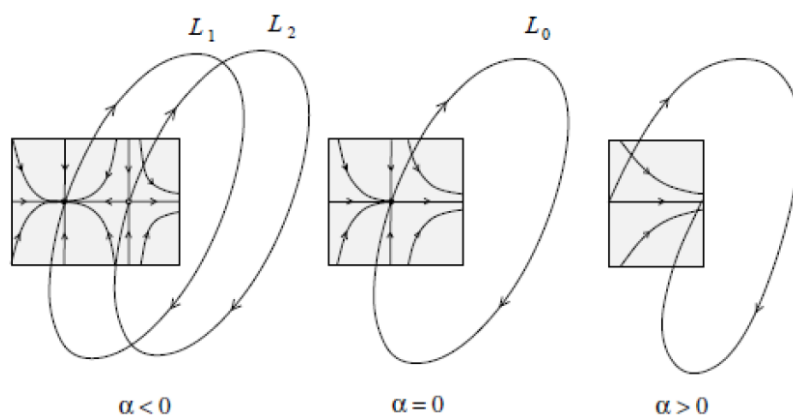


Figura 2.12: *Bifurcación Silla-Nodo de Ciclos Límites*.

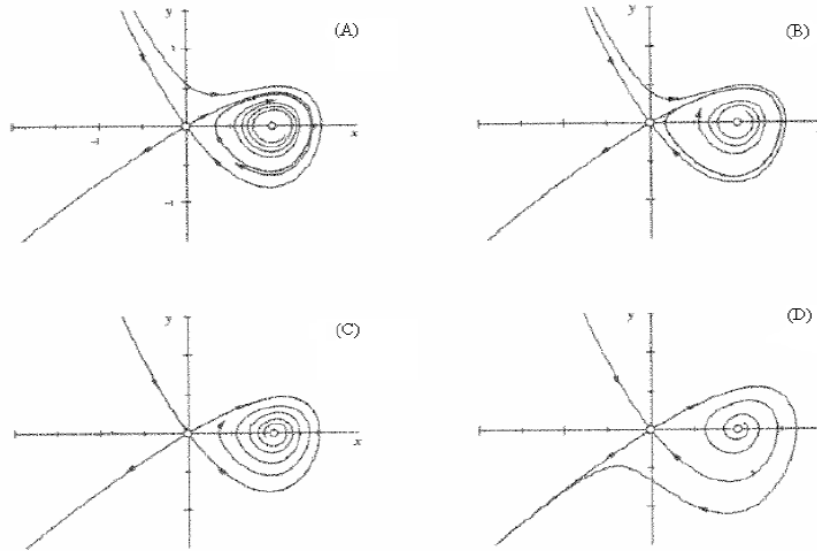


Figura 2.13: Planos de fase de una bifurcación homoclina.

Bifurcación Toro

La bifurcación Toro se puede entender como una Bifurcación Hopf de órbitas periódicas, donde la oscilación de las variables del sistema tiene una doble frecuencia. Por ejemplo, se puede tener una primera órbita periódica rodeada en forma de espiral por una segunda órbita periódica, tal y como se puede observar en la figura 2.14:

Este tipo de bifurcación puede ser de dos tipos: supercrítica (se atraen

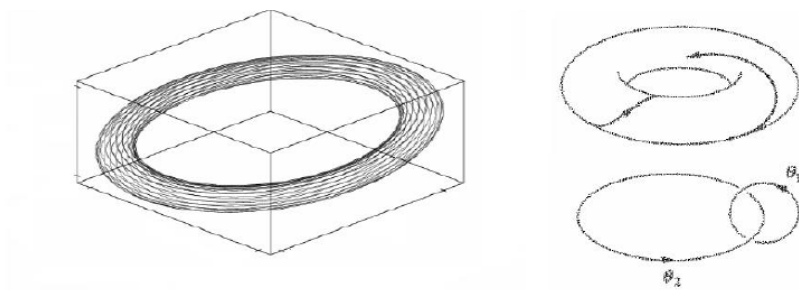


Figura 2.14: Bifurcación Toro.

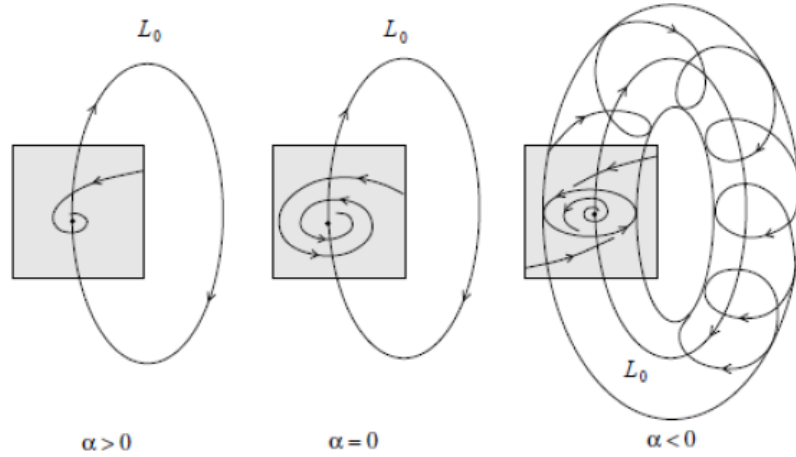


Figura 2.15: *Bifurcación Neimar-Sacker de Ciclos Límites.*

ambos ciclos) y subcrítica (se repelen ambos ciclos).

Duplicación de Periodo o Flip

Al contrario de la bifurcación tipo Silla-Nodo, donde sólo existen dos ciclos límites, estas bifurcaciones empiezan por tener un ciclo límite estable para un determinado valor inicial del parámetro de bifurcación dentro de un plano de fases. En el instante en el que se presenta una variación en el parámetro de control, las órbitas asociadas a las variables del sistema comienzan a dividirse en un par de órbitas, formándose una primera bifurcación de periodo doble. Pero si el parámetro sigue cambiando, en el sistema pueden ocurrir otras bifurcaciones de periodo doble. Por tanto, cada una de las órbitas anteriores se volverá a dividir en dos órbitas, originándose cuatro órbitas. Al seguir variándose el parámetro de bifurcación se pueden seguir formando más pares de órbitas en cascada dentro del sistema, conduciendo al sistema a un estado caótico.

En la figura 2.17 aparece una bifurcación de duplicación de periodo típica. Para el valor crítico de bifurcación $\alpha=0$ existe un ciclo límite estable, que corresponde a un punto fijo estable de la aplicación de Poincaré (nodo). Para $\alpha>0$, el punto fijo pierde la estabilidad y se convierte en un punto de silla, correspondiendo a un ciclo límite inestable mientras aparece un ciclo límite estable de periodo doble. Para $\alpha<0$ el ciclo límite desaparece.

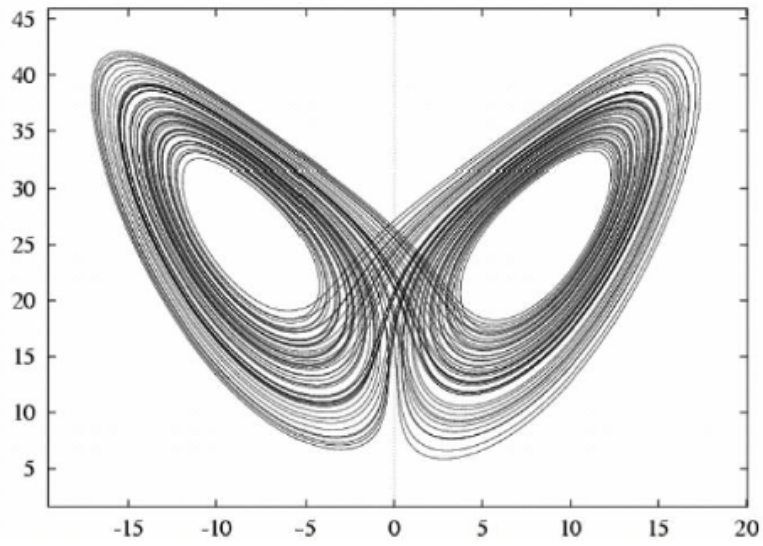


Figura 2.16: *Atractor extraño del Sistema de Lorenz.*

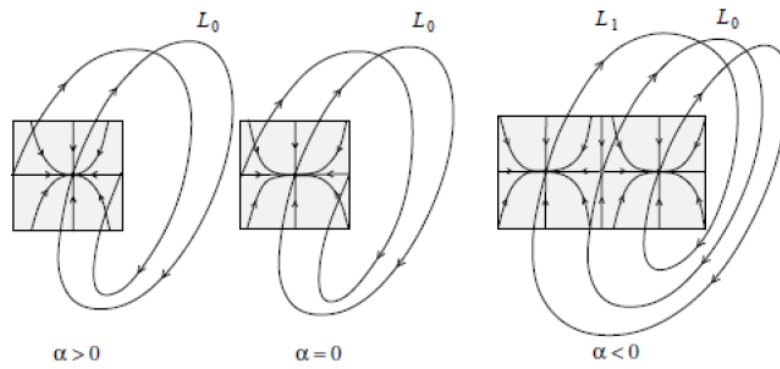


Figura 2.17: *Bifurcación Flip de Ciclos Límites.*

2.5. Osciladores electrónicos

2.5.1. Osciladores y ciclos límites

Los osciladores son circuitos electrónicos que pueden presentar oscilaciones de amplitud y periodos fijos sin excitación exterior. Estas oscilaciones se denominan ciclos límites u oscilaciones automantenidas. Un buen oscilador debe presentar al menos dos características para un correcto funcionamiento:

- 1) Una vez transcurrido el régimen transitorio inicial, los valores de amplitud y periodo de los ciclos límite no deben depender de las condiciones iniciales del sistema.

- 2) Las oscilaciones han de existir para unos rangos de los parámetros del sistema suficientemente amplios.

Debido a que los sistemas lineales no presentan estas características, cualquier oscilador tiene que ser un sistema no lineal y ser modelado como tal para poder establecer analíticamente la amplitud y el periodo de las oscilaciones. La existencia de al menos un dispositivo no lineal en un circuito convierte a éste en no lineal.

2.5.2. Circuitos electrónicos no lineales

Los circuitos electrónicos no lineales incluyen, además de algunos dispositivos lineales (resistencias, bobinas y condensadores), ciertos dispositivos no lineales usualmente basados en materiales semiconductores (diodos, transistores y amplificadores operaciones principalmente). Mientras que los dispositivos lineales no presentan ninguna dificultad y pueden modelarse mediante ecuaciones algebraicas o diferenciales lineales bien conocidas, para los dispositivos no lineales es necesario establecer unos modelos matemáticos adecuados que describan su funcionamiento de forma suficientemente aproximada.

2.5.3. Circuitos electrónicos lineales a trozos

Una posibilidad muy utilizada es considerar que los dispositivos no lineales presentan varios modos de funcionamiento y establecer para cada uno de ellos un modelo lineal. Así se obtiene para cada dispositivo no lineal un modelo lineal a trozos. Cada modo de funcionamiento está asociado a un rango de las variables utilizadas para describir el comportamiento del circuito, o

expresado de otra forma, a cada modo corresponde una región en un espacio de fase.

De esta forma la resolución de un circuito no lineal puede hacerse resolviendo varios circuitos lineales, cada uno de los cuales tiene validez sobre periodos de tiempo que llamamos intervalos. Un intervalo finaliza y comienza el siguiente cuando las variables asociadas a los dispositivos no lineales pasan de un rango de valores a otro, o equivalentemente, cuando el punto representativo del estado del sistema en el espacio de fase pasa de una región a otra. En ese instante decimos que ha cambiado el modo de funcionamiento del circuito.

Capítulo 3

Análisis del sistema dinámico

3.1. Descripción del sistema

El estudio de los ciclos límite de un sistema diferenciable es, después del análisis de soluciones en equilibrio, uno de los problemas más importantes en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos. Diferentes herramientas provenientes de la teoría de bifurcación están disponibles para garantizar la bifurcación y la existencia de ciclos límite en sistemas lineales, sin embargo en este proyecto, trataremos sistemas a trozos lineales no diferenciables, debido a la aplicación a la vida real, en concreto, con osciladores electrónicos.

Consideramos el sistema de la familia de sistemas lineales a trozos escritos en la forma de Luré:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) = A_R \mathbf{X} + b \text{sat}(x), \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{X} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, y la función de saturación viene dada por:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ x & \text{si } |x| \leq 1, \\ -1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

La matriz A_R tendrá la siguiente expresión:

$$A_R = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector b está definido por:

$$b = \begin{pmatrix} T - t \\ M - m \\ D - d \end{pmatrix},$$

de manera que, para $|x| \leq 1$ la dinámica está gobernada por el sistema:

$$\dot{\mathbf{X}} = A_C \mathbf{X} = \begin{pmatrix} T & -1 & 0 \\ M & 0 & -1 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

mientras que A_R representa la dinámica del sistema en las zonas externas y A_C la dinámica del sistema en la zona central. El parámetro T representa la traza, M es la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal y D es el determinante de la matriz A_C . Análogamente, t representa la traza, m la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal y d el determinante de la matriz A_R . Toda la información sobre la dinámica del sistema en la zona lineal está contenida en los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A_C que satisfacen el polinomio característico de la matriz. El polinomio característico de A_C viene dado por:

$$p_{A_C}(\lambda) = \det(A_C - \lambda I) = \lambda^3 - T\lambda^2 + M\lambda - D. \quad (3.3)$$

Estamos interesados en la generación de oscilaciones automantenidas a partir de una situación estable. Cuando el sistema posee un autovalor real estable (negativo) y dos autovalores complejos conjugados que pasan de estables a inestables, es decir, la parte real de los autovalores complejos pasa de negativa a positiva, se producen oscilaciones periódicas cuya amplitud viene limitada por la saturación existente en el sistema. Equivalentemente, podemos decir que buscamos en que condiciones los dos autovalores complejos de la matriz A_C cruzan el eje imaginario del plano complejo. Sabemos que el sistema se hará estable para:

$$T < 0, \quad D < 0, \quad MT - D < 0. \quad (3.4)$$

Se tiene que $A_C = A_R + be_1^T$, donde $e_1^T = \{1, 0, 0\}$, dando como resultado la familia de sistemas llamados en su forma generalizada de Liénard, el cuál, es análogo a la forma canónica desarrollada en teoría de control. Por tanto, bajo estas condiciones para cada sistema de la forma expuesta, haciendo un cambio de variables obtendríamos lo expuesto en (3.4).

Considerando una estructura general de los autovalores para realizar el análisis dinámico, introducimos ε como el parámetro de bifurcación tal que los tres autovalores de la matriz A_C son $\lambda(\varepsilon)$ para autovalores reales y $\sigma(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$ para autovalores con parte real y compleja. Los parámetros λ , σ , ω tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \sigma(\varepsilon) &= \sigma_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \omega(\varepsilon) &= \omega_0 + \omega_1\varepsilon + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde se asumirá siempre $\omega_0 > 0$. Además, asumiremos que σ_1 y λ_1 no se anulan. Usando las expresiones anteriores resultan las siguientes expresiones para T , M y D :

$$\begin{aligned}T(\varepsilon) &= \lambda(\varepsilon) + 2\sigma(\varepsilon), \\ M(\varepsilon) &= \sigma^2(\varepsilon) + \omega^2(\varepsilon) + 2\lambda(\varepsilon)\sigma(\varepsilon), \\ D(\varepsilon) &= \lambda(\varepsilon)[\sigma^2(\varepsilon) + \omega^2(\varepsilon)],\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde tenemos que:

$$\begin{aligned}T_0 &= T(0) = \lambda_0, \\ M_0 &= M(0) = \omega_0^2, \\ D_0 &= D(0) = \lambda_0\omega_0^2.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Sabemos que ante las siguientes transformaciones no se verá afectado el sistema propuesto, conservándose invariante:

$$(x, y, z, \tau, t, m, d, \varepsilon) \longrightarrow (x, -y, z, -\tau, -t, m, -d, -\varepsilon)\tag{3.8}$$

Esta propiedad simétrica es útil para simplificar el análisis de este tipo de sistemas. Después, sintetizaremos todas las afirmaciones fundamentales acerca del posible equilibrio de este tipo de sistema.

3.2. Análisis del sistema dinámico

Asumimos en lo que sigue $\lambda_0 = 0$, es decir que al pasar ε por 0, tanto el autovalor real como la parte real del par complejo conjugado se anulan. Analizamos primero el número de equilibrios que puede presentar nuestro sistema. Si nos fijamos en la tercera ecuación del sistema, es decir, $\dot{z} = dx + (D - d)\text{sat}(x)$, vemos que los equilibrios deben cumplir la condición

$dx + (D - d) \text{sat}(x) = 0$. Si $d = D \neq 0$, entonces la única solución es $x = 0$. Si $D - d \neq 0$, podemos dividir por esta expresión y escribir:

$$\frac{d}{d - D}x = \text{sat}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{D}{d}}x = \text{sat}(x),$$

Si d y D tienen signos distintos ($D/d < 0$), la fracción $0 < \frac{1}{1 - \frac{D}{d}} < 1$, signo de que hay tres soluciones, en concreto $x = 0$ y $x = \pm(1 - \frac{D}{d})$, con $|x| > 1$. Si d y D tienen el mismo signo ($D/d > 0$), $1 - \frac{D}{d} < 1$ y puede ocurrir que:

- a) $0 < 1 - \frac{D}{d} < 1$,
- b) $0 < 1 - \frac{D}{d} = 0$,
- c) $1 - \frac{D}{d} < 0$.

En los tres casos es fácil ver que sólo hay equilibrio si $x = 0$. Finalmente si $D = 0$ (que es lo que ocurre cuando $\varepsilon = 0$) queda la condición $d[x - \text{sat}(x)] = 0$, por tanto, todo valor de $x \in [-1, 1]$ serviría como solución.

Para ε pequeño en valor absoluto, se denota que el signo de D es igual al signo de $\lambda_1 \varepsilon$, por tanto, se desprenden las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $d\lambda_1 \varepsilon > 0$ el único punto de equilibrio es el origen.
- (b) Si $d\lambda_1 \varepsilon < 0$ el equilibrio está en el origen y los dos puntos

$$X_{Eq}^+ = \left(1 - \frac{D(\varepsilon)}{d}, T(\varepsilon) - t \frac{D(\varepsilon)}{d}, M(\varepsilon) - m \frac{D(\varepsilon)}{d} \right)^T, \quad X_{Eq}^- = -X_{Eq}^+.$$

- (c) Si $\varepsilon = 0$ todos los puntos del siguiente segmento son equilibrios del sistema.

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^T = \mu(1, 0, \omega_0^2)^T, |\mu| \leq 1\}$$

Si además $d \neq 0$, el segmento contendría todos los puntos del equilibrio.

A partir de la conclusión c) vemos que para $\varepsilon = 0$ se produce lo que se denomina *bifurcación pitchfork degenerada*, que se observa en la figura 3.1:

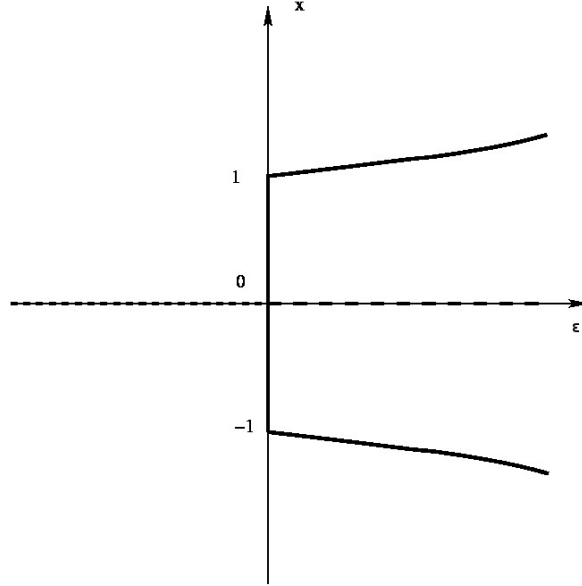


Figura 3.1: El diagrama de bifurcación del equilibrio del sistema dibujado cuando $d > 0$. Sólo se ha representado la coordenada x del equilibrio de puntos.

Nótese que para $d\lambda_1\varepsilon < 0$ los puntos X_{Eq}^{\pm} son puntos convergentes del campo de vectores correspondientes a $|x| > 1$ pero estos puntos están fuera de sus correspondientes zonas. Estos puntos no constituyen un equilibrio real, aunque organizan la dinámica en las regiones externas. Estos puntos de equilibrio son comúnmente llamados *puntos de equilibrio virtual*.

Para estudiar la existencia de órbitas periódicas en este tipo de sistemas, comenzaremos considerando la zona central del sistema con $\varepsilon = 0$. En este caso, una computación directa muestra que la solución de nuestro sistema a estudiar partiendo de un punto arbitrario tal como $(x_0, y_0, z_0)^T$ para $\tau = 0$ viene dado por la solución:

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = e^{(A_C\tau)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_0^2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 \cos \omega_0 \tau & -\omega_0 \sin \omega_0 \tau & 1 - \cos \tau \\ \omega_0^3 \sin \omega_0 \tau & \omega_0^2 \cos \omega_0 \tau & -\omega_0 \sin \omega_0 \tau \\ 0 & 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Si $|x_0| < 1$ la correspondiente órbita es un arco de la siguiente elipse:

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{\left(x(\tau) - \frac{z_0}{\omega_0^2}\right)^2}{\left(x_0 - \frac{z_0}{\omega^2}\right)^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}} + \frac{y^2(\tau)}{\omega_0^2 \left(x_0 - \frac{z_0}{\omega^2}\right)^2 + y_0^2} = 1, z(\tau) = z_0\}, \quad (3.10)$$

cruzando por el punto inicial. Para algunos puntos iniciales se obtienen elipses completas en la región $|x| \leq 1$ y por tanto tendremos que $-\omega_0^2 < z_0 < \omega_0^2$.

Por tanto, las soluciones obtenidas en (3.9) que están contenidas para todo τ en la zona central son órbitas periódicas del sistema que tienen la forma de dos conos que comparten la elipse $\omega^2 x^2 + y^2 \leq \omega^2$.

La estructura de las órbitas periódicas es independiente de los valores de t , m y d . Para $\varepsilon \neq 0$ y pequeño, tenemos que la mayoría de estas órbitas periódicas desaparecerán pero algunas de ellas podrían llegar a dar a lugar a ciclos límites.

A continuación en la figura 3.2 se muestra la estructura de las órbitas periódicas en la zona central:

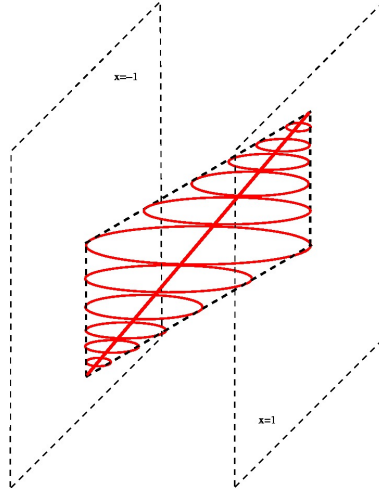


Figura 3.2: Estructura de las órbitas periódicas $\varepsilon = 0$ en la zona central. Los dos conos están completamente solapados por órbitas periódicas alrededor del segmento de puntos en equilibrio. $\{(x, 0, x\omega^2)^T : |x| \leq 1\}$.

Como es bien sabido, un sistema lineal no puede tener ciclos límites. Por eso, los ciclos límites han de cruzar los planos frontera $x = 1$ o $x = -1$. Para algunos valores de parámetros existe un ciclo límite en dos zonas a la vez que se denominan ciclos límites bizona. Análogamente, podemos hablar de ciclos límites trizona cuando se cruzan ambos planos frontera simultáneamente. Debido a la simetría del campo de vectores con respecto al origen, los ciclos límites no simétricos deben aparecer en parejas, esto es, cuando un ciclo límite no simétrico existe debe existir por tanto su simétrico correspondiente.

Resumen de los resultados principales conocidos

A continuación se detallan los resultados ya conocidos, cuyo desarrollo puede encontrarse en [4].

Ciclos límites trizonales

Se considera el sistema bajo las siguientes condiciones análogas a la bifurcación de *Hopf*. Así pues, se supone para $\varepsilon = 0$, $\lambda_0 \neq 0$ y $\sigma_1 \neq 0$ de manera que se tiene que $MT - D = 0$. Introducimos por conveniencia el parámetro $\delta = d - t\omega_0^2 + \lambda_0(\omega_0^2 - m) \neq 0$, cuyo signo caracteriza el tipo de bifurcación que tiene lugar. Bajo estas condiciones el sistema sufre una bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite (FCCL), a partir de la configuración de las órbitas periódicas que existen en la zona central para $\varepsilon = 0$, un ciclo límite aparece para $\delta\sigma_1\varepsilon > 0$ siendo $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeño. El ciclo límite tiene como periodo:

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0^3\delta} [\lambda_0\sigma_1(t\omega_0^2 - d) + \omega_0^2\sigma_1(\omega_0^2 - m) - \omega_0\omega_1\delta]\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

y su amplitud vendría dada tal que x (definida como $\max\{x\} - \min\{x\}$) por:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi\sigma_1(\omega_0^2 + \lambda_0^2)}{2\delta} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

En particular, si $\lambda_0 < 0$ y $\delta > 0$, tendremos que el ciclo límite bifurca para $\sigma_1\varepsilon > 0$ y la correspondiente órbita es asintóticamente estable.

Si ahora consideramos el sistema bajo las condiciones: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, es decir, en las condiciones análogas a la bifurcación *Hopf-zero*, sigue

bifurcando un ciclo límite aunque ahora los esquemas se simplifican algo. En particular para $\varepsilon = 0$ tenemos que $\delta = d - t\omega_0^2 \neq 0$

Este ciclo es simétrico con respecto al origen y bifurca desde la elipse $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \omega^2 x^2 + y^2 = \omega^2, z = 0\}$.

Así, el ciclo límite tiene ahora el siguiente periodo:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} + 2\pi \left(\frac{\omega_0 \sigma_1 (\omega^2 - m) - \omega_1 \delta}{\omega_0^2 \delta} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

y su amplitud x (definida como $\max\{x\} - \min\{x\}$), viene dada por:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi \sigma_1 \omega_0^2}{2\delta} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Además, el ciclo límite que bifurca es estable si y solo si $t < 0$, $d < 0$ y $\delta > 0$. Usando la propiedad de invariancia podemos añadir una nueva afirmación diciendo que el ciclo límite que bifurca es completamente inestable (los dos exponentes característicos tienen parte real positiva) si y solo si $t > 0$, $\delta < 0$ y $d > 0$.

Ciclos límites bizonales

A la hora de analizar las posibles bifurcaciones bizonales, debido a la simetría presente, es claro que los ciclos límites bi-zona siempre existen en parejas, cruzando cada uno de ellos los planos fronteras establecidos $x = 1$ y $x = -1$, respectivamente. Por ello, basta estudiar el ciclo límite que aparece cruzando el plano $x = 1$, definiendo el siguiente sistema auxiliar:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{cases} A_R \mathbf{X} + b, & \text{si } x \geq 1, \\ A_C \mathbf{X}, & \text{si } x < 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Este sistema solo tendría dos zonas de linealidad. De acuerdo con esto, sólo los ciclos límites contenidos dentro de la región $x \in [-1, \infty)$ corresponderán a ciclos límites del sistema original, representando a uno de los miembros de la pareja.

El equilibrio del sistema está en el origen en la zona con $x < 1$ y X_{Eq}^+ en la zona con $x \geq 1$. De una forma análoga al análisis hecho para las órbitas periódicas del ciclo límite trizona, podemos considerar el sistema con $\varepsilon = 0$. Por tanto, cada solución en la zona con $x < 1$ empieza desde un punto

arbitrario $(x_0, y_0, z_0)^T$ para $\tau = 0$ viene dada por (3.9), y su correspondiente órbita es un arco de una elipse con la expresión dada en (3.10).

Ahora, si esta elipse está completamente contenida en la región $x < 1$ por tanto tenemos $z_0 < \omega^2$. Esta familia de elipses están completamente contenidas en la región $x < 1$ las cuales generan un cono ilimitado de órbitas periódicas.

Nótese que este cono ilimitado puede ser obtenido prolongando la parte superior de la figura (3.2). En este caso, solo las órbitas periódicas del sistema verifican $|x| \leq 1$ corresponderán a órbitas periódicas del sistema a estudiar.

Como hemos visto, un ciclo límite del sistema puede aparecer para $\varepsilon \neq 0$ desde una órbita periódica de la frontera del cono, la cual es una elipse horizontal con centro en $(z/\omega^2, 0, z)^T$ y x -semieje $1 - z/\omega^2$. Por tanto, cuando $|\varepsilon|$ es lo suficientemente pequeño y $0 < z < \omega^2$, podemos asegurar que la primera coordenada de los puntos del ciclo límite bifurcado está en el rango $x \in (-1, \infty)$ y consecuentemente ese ciclo límite del sistema bizonal es también un ciclo límite para el sistema trizonal.

Además, la simetría del sistema obliga a la presencia de un ciclo límite simétrico, ahora apareciendo en la región $x \in (-\infty, 1)$. De ahí se deduce que la bifurcación mostrada conlleva la aparición de un par de ciclos límites para el sistema, cada uno bifurcando desde la frontera de uno de los dos conos de la figura 3.2.

Sintetizamos los resultados para estos ciclos límites que aparecen en [4]: Con $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\delta = d - t\omega_0^2 \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $d\sigma_1 - \lambda_1\delta \neq 0$ y $0 < \hat{z} = \frac{d\sigma_1\omega_0^2}{d\sigma_1 - \lambda_1\delta} < \omega_0^2$:

El sistema presenta un ciclo límite bi-zonal para $\varepsilon = 0$. Por tanto, existe un par de ciclos límites para $\delta\sigma_1\varepsilon > 0$ siendo $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeño. Su periodo presenta la siguiente expresión:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\pi[\omega_0\sigma_1(\omega_0^2 - m) - \omega_1\delta]}{\delta\omega_0^2}\varepsilon + O(\varepsilon^{5/3}),$$

y su amplitud tendría la siguiente expresión:

$$A = \frac{2\lambda_1\delta}{\lambda_1\delta - d\sigma_1} - \frac{2(3\pi)^{2/3}\sigma_1^{2/3}d\lambda_1\sigma_1\omega_0^2[2t(\omega_0^2 - m) - 3\delta]}{5\omega^{2/3}\delta^{2/3}(\lambda_1\delta - d\sigma_1)^2}\varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon).$$

El ciclo límite es estable si y solo si $t < 0$ y $\lambda_1\sigma_1 < 0$, o $t = 0$, $\rho > 0$ y $d\sigma_1(2\sigma_1 + \lambda_1) < 0$.

3.3. Análisis de órbitas periódicas mediante ecuaciones de cierre

3.3.1. Órbitas periódicas bizonales

Asumimos la existencia de una órbita periódica existente que intersecta a la frontera $x = 1$ en dos puntos, cuyos puntos tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Como se muestra en la figura 3.3, se representan los puntos X_0 y X_1 del ciclo límite bizonal y sus tiempos de vuelo en la parte izquierda (τ_C) y derecha (τ_R) al plano frontera $x = 1$.

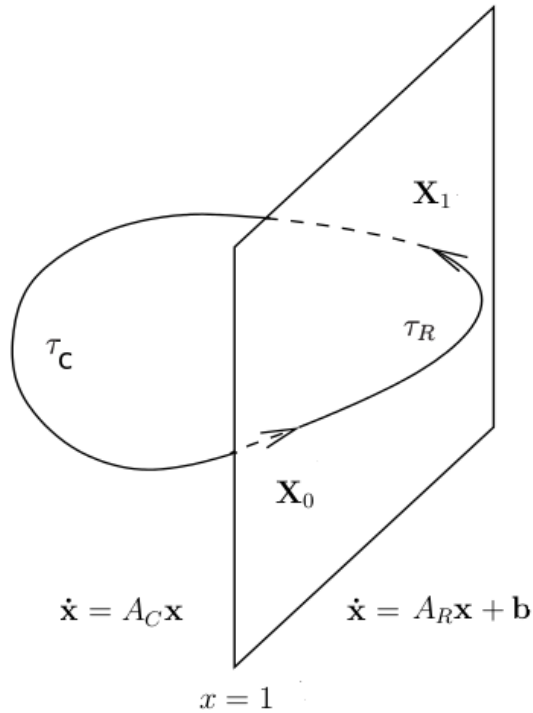


Figura 3.3: Ciclo límite bizonal en el plano frontera $x = 1$

3.3. ANÁLISIS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS MEDIANTE ECUACIONES DE CIERRE 39

Definido el sistema como

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{cases} A_R \mathbf{X} + b & \text{si } x \geq 1 \\ A_C \mathbf{X} & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

procedemos a hallar la solución desde X_1 directamente mediante

$$x(\tau) = e^{A_C \tau} X_1. \quad (3.13)$$

Por tanto, se tiene que:

$$X_0 = e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (3.14)$$

Cuando el sistema es compatible y X_R es una solución de $A_R x + b = 0$, y por tanto, equilibrio del sistema en la zona R, podemos transformar el sistema en un sistema homogéneo mediante una translación para solucionarlo y posteriormente deshacer la translación. La solución tiene la siguiente forma:

$$x(\tau) = X_R + e^{A_R \tau} [X_0 - X_R]. \quad (3.15)$$

De forma que para el tiempo de vuelo τ_R se tiene

$$X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R). \quad (3.16)$$

Por consiguiente, tenemos el sistema

$$\begin{cases} X_0 = e^{A_C \tau_C} X_1, \\ X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \end{cases}$$

donde se tienen dos ecuaciones vectoriales de tres componentes teniendo como incógnitas τ_C , τ_R , y_0 , z_0 , y_1 , z_1 .

Realizando una serie de operaciones reducimos el sistema a uno con 4 ecuaciones escalares y 4 incógnitas, las cuales son: y_0 , z_0 , τ_C , τ_R . Despejando X_1 de la primera ecuación obtenemos

$$X_1 = e^{-A_C \tau_C} X_0 \quad (3.17)$$

El sistema reducido resultante a resolver queda de la forma:

$$\begin{cases} e_1^T e^{-A_C \tau_C} X_0 - 1 = 0 \\ e_1^T (X_R - e^{-A_C \tau_C} X_0 + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R)) = 0 \\ e_2^T (X_R - e^{-A_C \tau_C} X_0 + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R)) = 0 \\ e_3^T (X_R - e^{-A_C \tau_C} X_0 + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R)) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

siendo los vectores $e_1^T = \{1, 0, 0\}$, $e_2^T = \{0, 1, 0\}$, $e_3^T = \{0, 0, 1\}$.

3.3.2. Órbitas periódicas trizonales

Asumimos la existencia de una órbita periódica existente intersectando los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$ en cuatro puntos, cuyos puntos tienen la siguiente expresión:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Como se muestra en la figura 3.4, se representan los puntos X_0, X_1, X_2 y X_3 del ciclo límite trizonal y sus tiempos de vuelo en la parte central (τ_C), en la parte izquierda (τ_L) y en la parte derecha (τ_R).

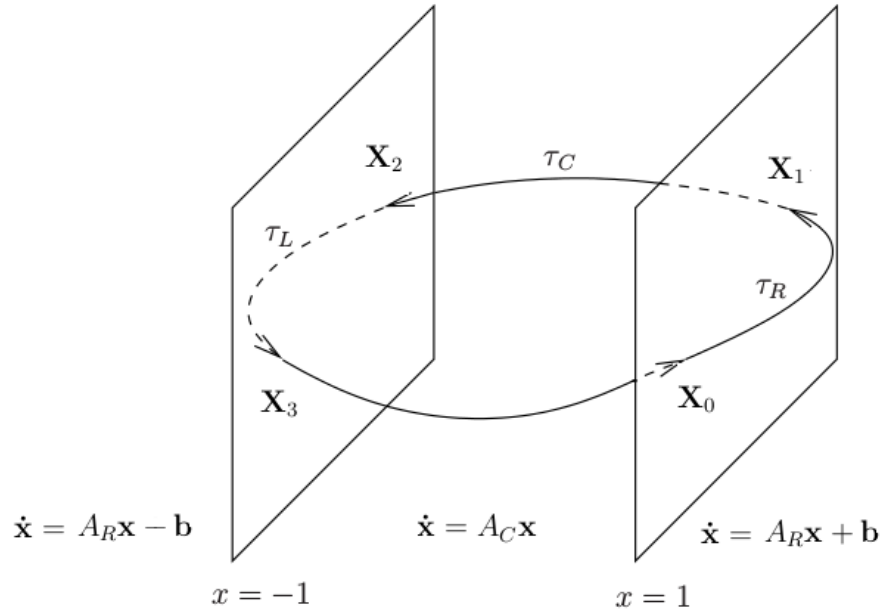


Figura 3.4: Ciclo límite trizonal en los planos frontera $x = -1$ y $x = 1$

La simetría de la órbita periódica trizonal del sistema implica que

$$X_2 = -X_0 \quad y \quad X_3 = -X_1,$$

3.3. ANÁLISIS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS MEDIANTE ECUACIONES DE CIERRE 41

por tanto, el estudio de la trayectoria entre X_0 y X_2 es suficiente para determinar por completo la órbita. En la zona central tenemos que $\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x}$. Tomando como punto inicial X_0 tenemos como solución en la zona derecha

$$x(\tau) = X_R + e^{A_R \tau} (X_0 - X_R). \quad (3.19)$$

El punto X_1 de la trayectoria donde $\tau = \tau_R$ satisface que

$$X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \quad (3.20)$$

proporcionando la primera ecuación de cierre del ciclo límite trizonal. En la parte central tenemos que $\dot{\mathbf{x}} = A_C \mathbf{x}$. Tomando como punto inicial X_1 tenemos como solución

$$x(\tau) = e^{A_C \tau} X_1, \quad (3.21)$$

Para el punto X_2 donde $\tau = \tau_C$ tenemos que

$$X_2 = e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (3.22)$$

Sabemos que $X_2 = -X_0$, por tanto, sustituyendo en 3.22 tenemos que

$$X_0 = -e^{A_C \tau_C} X_1. \quad (3.23)$$

La ecuación 3.23 proporciona la segunda ecuación de cierre para el ciclo límite trizonal, por consiguiente, tenemos el sistema no lineal

$$\begin{cases} X_1 = X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R), \\ X_0 = -e^{A_C \tau_C} X_1, \end{cases}$$

donde se tienen dos ecuaciones vectoriales de tres componentes teniendo como incógnitas τ_C , τ_R , y_0 , z_0 , y_1 , z_1 .

Realizando una serie de operaciones reducimos el sistema a uno con 4 ecuaciones escalares y 4 incógnitas, las cuales son: y_0 , z_0 , τ_C , τ_R . El sistema reducido resultante a resolver queda de la forma:

$$\begin{cases} e_1^T e^{-A_C \tau_C} X_0 + 1 = 0 \\ e_1^T (X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R)) - 1 = 0 \\ e_2^T (X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R + e^{-A_C \tau_C} X_0)) = 0 \\ e_3^T (X_R + e^{A_R \tau_R} (X_0 - X_R + e^{-A_C \tau_C} X_0)) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

siendo los vectores $e_1^T = \{1, 0, 0\}$, $e_2^T = \{0, 1, 0\}$, $e_3^T = \{0, 0, 1\}$.

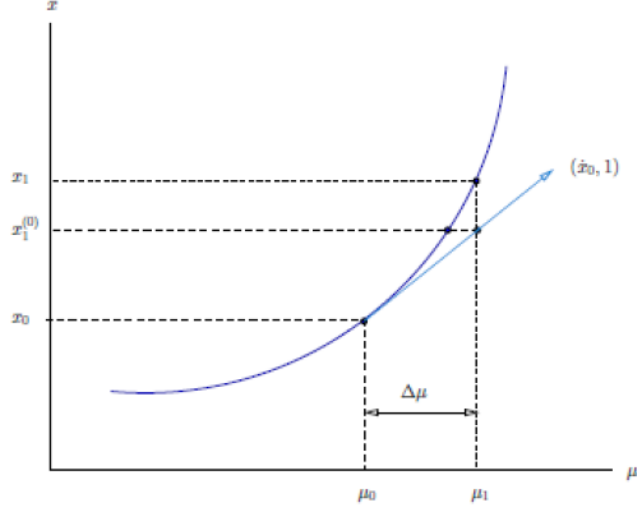


Figura 3.5: Interpretación gráfica de la continuación paramétrica natural.

3.4. Continuación

Consideramos el cálculo de familias uniparamétricas de equilibrios de $x'(t) = f(x(t), \mu)$, es decir, soluciones de: $f(x, \mu) = 0$. A un conjunto de estas soluciones se le denomina rama de soluciones. Con $\mu \in \mathbb{R}$ y $X = X(x, \mu)$, la ecuación se puede reescribir como: $f(X) = 0$, donde $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una solución $X_0 = (x_0, \mu_0)$ de $f(X) = 0$ se considera regular si $f_x(x_0, \mu_0)$ tiene rango máximo, es decir, si $\text{rango}(f_x(x_0, \mu_0)) = n$. Se verifica que cerca de una solución regular no existe sino una única rama de soluciones.

3.4.1. Continuación paramétrica natural

Se toma μ como parámetro de continuación y suponemos que tenemos una solución x_0 de $f(x, \mu) = 0$ en μ_0 , así como sus derivadas \dot{x}_0 respecto al parámetro μ , y que queremos calcular la solución x_1 en $\mu_1 = \mu_0 + \Delta\mu$ (ver figura 3.5 para interpretación gráfica).

Para hallar x_1 , resolvemos $f(x_1, \mu_1) = 0$ para x_1 por el Método de Newton:

$$\begin{aligned} f_x(x_1^{(k)}, \mu_1) \Delta x_1^{(k)} &= -f(x_1^{(k)}, \mu_1) \\ x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Siendo $x_1^{(0)} = x_0 + \Delta \mu \dot{x}_0$. Si $f_x(x_1, \mu_1)$ es no singular y $\Delta \mu$ suficientemente pequeño, la Teoría del Método de Newton garantiza que este proceso iterativo converge. Después de la convergencia, el nuevo vector \dot{x}_1 se puede obtener resolviendo:

$$f_x(x_1, \mu_1) \dot{x}_1 = -f_\mu(x_1, \mu_1) \quad (3.26)$$

Esta ecuación resulta de derivar $f_x(x(\mu), \mu) = 0$ con respecto a μ en $\mu = \mu_1$.

3.4.2. Método de pseudo longitud de arco de Keller

Este método fue desarrollado por Keller (1977, 1987) y es utilizado como método de continuación en el software AUTO desarrollado por Doedel (1986). Permite la continuación de cualquier solución regular y es considerado geoméricamente como el método de continuación más natural.

Supongamos que tenemos una solución (x_0, μ_0) de $f(x, \mu) = 0$, así como del vector normalizado $(\dot{x}_0, \dot{\mu}_0)$ de la rama de soluciones en (x_0, μ_0) . El método consiste en resolver las siguientes ecuaciones para x_1 y μ_1 :

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= 0 \\ (x_1 - x_0)\dot{x}_0 + (\mu_1 - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resolviendo por Método de Newton:

$$\begin{pmatrix} (f_x^1)^{(k)} & (f_\mu^1)^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta \mu_1^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x_1^{(k)}, \mu_1^{(k)}) \\ (x_1^{(k)} - x_0)\dot{x}_0 - (\mu_1^{(k)} - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Determinamos el vector de dirección resolviendo:

$$\begin{pmatrix} f_x^1 & f_\mu^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\mu}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Posteriormente se normaliza dicho vector. La orientación se conserva si Δs es suficientemente pequeño. El nuevo vector de dirección se reescala para que sea unitario: $\dot{x}_1^2 + \dot{\mu}_1^2 = 1$. En la práctica, el paso Δs se actualiza durante el cálculo de la rama de soluciones. En el caso más simple, la elección del nuevo paso Δs se basa en la convergencia del Método de Newton.

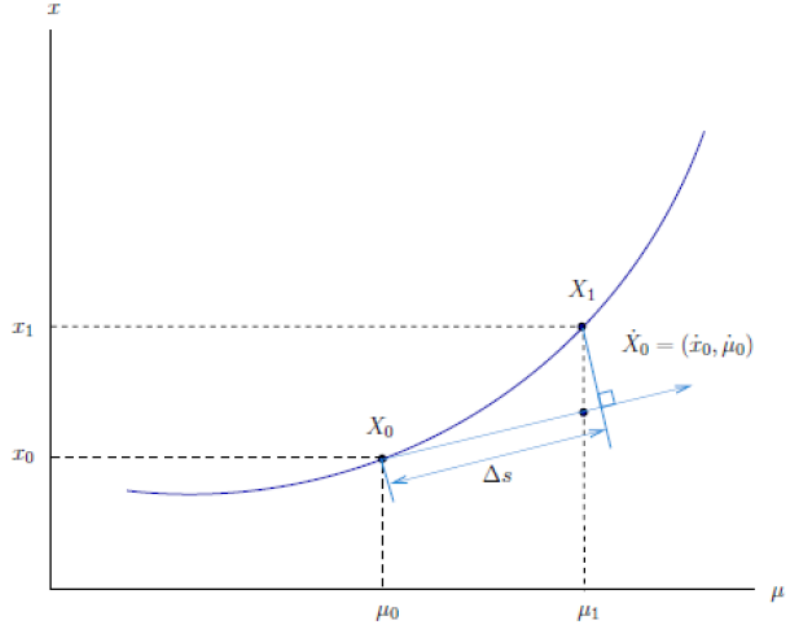


Figura 3.6: Interpretación gráfica del Método de Keller.

3.4.3. Algoritmo utilizado en el Método de pseudo longitud de arco de Keller

A partir de las series proporcionadas en los trabajos [2] y [3] obtenemos aproximaciones de x_0 y μ_0 tales que $f(x_0, \mu_0) = 0$. A partir de estos resultados, aplicamos el Método de Newton para hallar valores fiables de x_0 y μ_0 . Una vez que tenemos el punto $X_0 = (x_0, \mu_0)$, calculamos el nuevo punto X_{01} a partir de una pequeña variación en la coordenada $\mu \rightarrow \mu + h$ y volvemos a aplicar el Método de Newton para hallar dicho nuevo punto X_{01} . A partir de estos dos puntos, X_0 y X_{01} , calculamos el vector V_0 mediante la siguiente expresión:

$$V_0 = \frac{X_{01} - X_0}{h} \quad (3.30)$$

y posteriormente se normaliza

$$V_0 = \frac{V_0}{|V_0|} \quad (3.31)$$

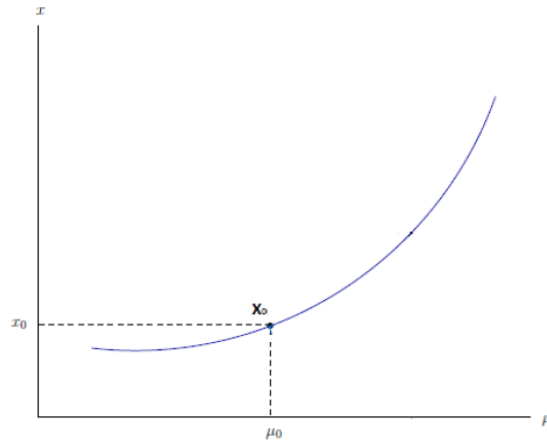


Figura 3.7: Valores de x_0 y μ_0 obtenido por el Método de Newton.

Este primer vector no es necesario para el método de continuación, pero sí para el cálculo del vector dirección necesario para el funcionamiento del algoritmo.

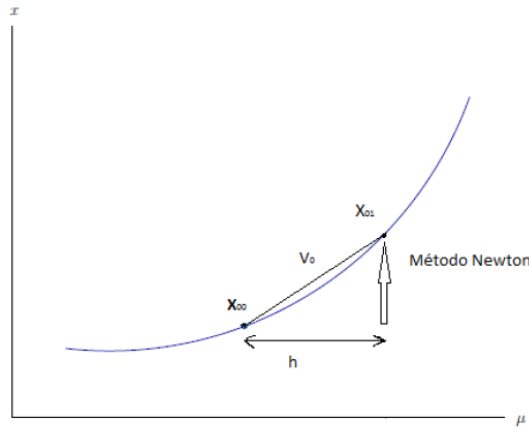


Figura 3.8: Cálculo de V_0 .

El vector al que llamamos V_0 se corresponde en el apartado anterior con $\dot{X}_0 = (x_0, \dot{\mu}_0)$, que se añade como fila extra al Jacobiano para el cálculo del nuevo vector de dirección $V = (x_1, \dot{\mu}_1)$ en las ecuaciones descritas en método de pseudo longitud de arco.

$$\begin{pmatrix} f_x^1 & f_\mu^1 \\ \dot{x}_0 & \dot{\mu}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Predicción

En este paso definimos el nuevo punto cercano a la curva, al cual llamaremos “predicción”, de manera que si llamamos h al paso de integración se tiene

$$\text{Predicción} = X_0 + h \cdot V \quad (3.33)$$

También debemos calcular la matriz Jacobiana en dicho punto, siendo su última fila el vector \vec{V} , que corresponde a la primera matriz de la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} (f_x^1)^{(k)} & (f_\mu^1)^{(k)} \\ \dot{x}_0 & \dot{\mu}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta \mu_1^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x_1^{(k)}, \mu_1^{(k)}) \\ (x_1^{(k)} - x_0)\dot{x}_0 - (\mu_1^{(k)} - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

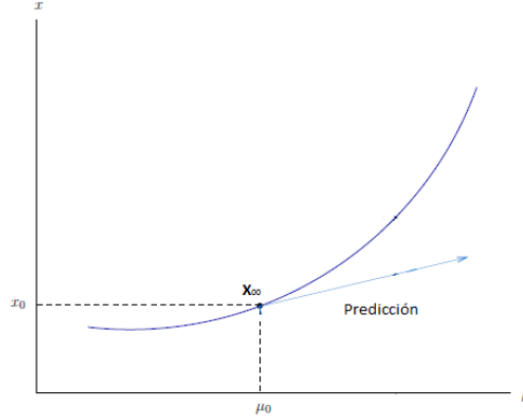


Figura 3.9: Cálculo del vector “predicción”.

Corrección

El objetivo de este paso es calcular la “corrección” necesaria para cada iteración del método. Para ello es necesario calcular previamente el

$$\text{incremento} : \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta \mu_1^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Correccion} = \text{Prediccion} - \text{Incremento} \quad (3.35)$$

A partir del paso de continuación Δs y de los valores $x_1^{(k)}$ y $\mu_1^{(k)}$ hallamos el valor de $(x_1^{(k)} - x_0)x_0 - (\mu_1^{(k)} - \mu_0)\mu_0 - \Delta s$. La resolución del sistema de ecuaciones lineales (3.34) nos proporciona el incremento $(\Delta x_1^{(k)}, \Delta \mu_1^{(k)})$ necesario para el posterior cálculo de la “corrección”. Esta operación corresponde a la resolución por el Método de Newton, acercándose más a la curva de bifurcación tras cada iteración. La “predicción” es actualizada en cada iteración, salvo en el punto 1 de la curva de bifurcación (ver figura 3.10). Las

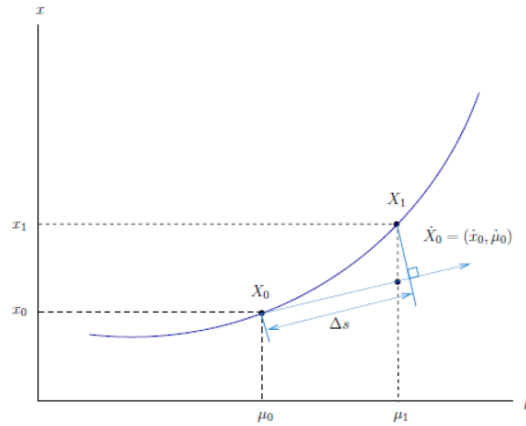


Figura 3.10: Cálculo de X_1 tras el proceso iterativo.

predicciones \hat{x}_1 y $\hat{\mu}_1$ se determinan resolviendo el sistema (3.32), que nos proporciona el nuevo vector de dirección. A partir de este momento, comienza el proceso iterativo “corrección-predicción” recorriendo la curva de bifurcación.

Como se puede observar en la figura (3.10), la predicción utiliza la dirección a la tangente a la curva, mientras que la corrección se lleva a cabo sobre el hiperplano ortogonal a dicha tangente.

Capítulo 4

Oscilador electrónico BVP

4.1. Obtención del sistema modelado del oscilador electrónico BVP

Para la aplicación de los resultados teóricos de los capítulos anteriores, consideramos el oscilador electrónico de Bonhoeffler-Van der Pol, que consta de dos condensadores (C_1 y C_2 de igual capacitancia C), una inductancia L , una resistencia r y una conductancia no lineal g , con una región activa, como se muestra en la figura 4.1:

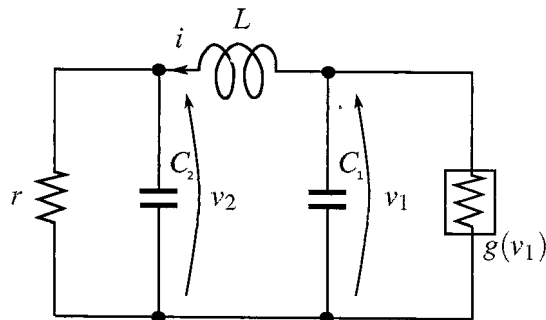
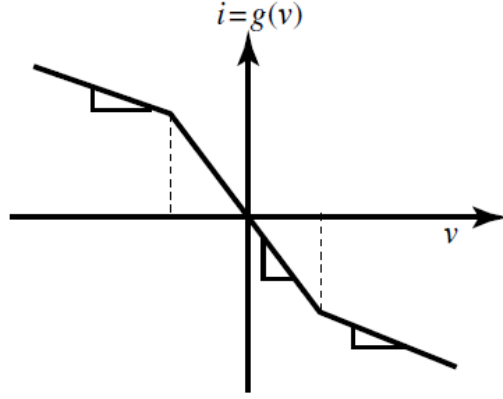


Figura 4.1: Esquema electrónico del oscilador BVP

La dinámica del oscilador viene definida por las siguientes ecuaciones diferenciales:

Figura 4.2: Conductancia lineal a trozos $g(v)$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = -i - g(v_1), \quad C_2 \frac{dv_2}{dt} = i - \frac{v_2}{r}, \quad L \frac{di}{dt} = v_1 - v_2,$$

donde v_1 y v_2 son las tensiones referidas a los condensadores C_1 y C_2 respectivamente, i es la corriente que circula por la inductancia L . La característica tensión-corriente $v - i$ del elemento no lineal resistivo se puede escribir como: $g(v) = -av - b \text{sat}(cv)$, donde $a, b, c > 0$ (ver figura 4.2) donde hemos utilizado la versión lineal a trozos considerada en [6].

Tras hacer una serie de operaciones, se llega a su forma normalizada resultando:

$$\begin{cases} \dot{x} = -z + \alpha x + \text{sat}(\beta x), \\ \dot{y} = z - \gamma y, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases} \quad (4.1)$$

El punto representa la derivada con respecto al nuevo tiempo τ , donde

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = a\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta = bc\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$x = \frac{v_1}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad y = \frac{v_2}{b}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad z = \frac{i}{b}.$$

Haciendo el cambio de variables $X = \beta x$ se tiene que $\dot{X} = \beta \dot{x} = \alpha X - \beta z + \beta \text{sat}(X)$, obteniéndose el sistema en la forma de Luré:

4.1. OBTENCIÓN DEL SISTEMA MODELADO DEL OSCILADOR ELECTRÓNICO BVP51

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & -\gamma & 1 \\ 1/\beta & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sat}(e_1^T x),$$

y \mathbf{X} será renombrada a \mathbf{x} , por comodidad en la notación. Por ello, se puede expresar en la forma (2.2) y por tanto, se podrá aplicar el mismo análisis del capítulo 2 y sus correspondientes resultados. Efectivamente, con un cambio lineal de las variables dadas por la matriz

$$P = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma^2 - 1 & \gamma & 1 \\ \gamma & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos escribir el sistema en su forma de Liénard como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -1 & 0 \\ 2 - \alpha\gamma & 0 & -1 \\ \alpha - \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \text{sat}(x), \quad (4.2)$$

donde quedan claramente reflejados los invariantes lineales de las matrices de cada zona T , M , D y t , m , d , con los valores siguientes:

$$\begin{aligned} T &= \alpha + \beta - \gamma, & t &= \alpha - \gamma, \\ M &= 2 - \gamma(\alpha + \beta), & m &= 2 - \alpha\gamma, \\ D &= \alpha + \beta - \gamma, & d &= \alpha - \gamma, \end{aligned} \quad (4.3)$$

De (4.3) se desprende que T y D son exactamente iguales, lo que implica que debe cumplirse una condición extra para los autovalores. Por consiguiente, teniendo en cuenta la estructura de T y D dadas en (3.6), se debe imponer para todos los valores de ε :

$$T(\varepsilon) - D(\varepsilon) = \lambda_0(1 - \omega_0^2) + (\lambda_1 - \lambda_1\omega_0^2 + 2\sigma_1 - 2\lambda_0\omega_1\omega_0)\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (4.4)$$

Tomamos $\gamma(\varepsilon)$ como único parámetro de bifurcación, dejando fijos α y β . Cabe aclarar que la decisión de dejar $\gamma(\varepsilon)$ como parámetro de bifurcación es debido al hecho de que corresponde con variar el valor de la resistencia r del circuito (4.1), algo que se puede realizar fácilmente con un potenciómetro (resistencia variable). En vista de las bifurcaciones analizadas en el capítulo 3 que tienen lugar con $\varepsilon = 0$, necesitamos que se cumpla primero: $\lambda_0(1 - \omega_0^2) = 0$. Si asumimos que $\lambda_0 \neq 0$ se llega a las siguientes condiciones

$$\omega_0 = 1 \quad y \quad \sigma_1 = \lambda_0 \omega_1.$$

Por consiguiente, $M(0) = \omega_0^2 = 1$, y se tiene para el parámetro de bifurcación $\gamma(\varepsilon)$ la condición de $\gamma(0) = \gamma_0$, con:

$$M(0) = 1 = 2 - \gamma_0(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad (4.5)$$

Igualando las expresiones de T en (4.3) y (3.6) y usando (3.5) se tiene

$$T(0) = \alpha + \beta - \gamma_0 = \lambda_0 + 2\sigma(0)$$

Como $\sigma_0 = 0$, usando (4.5) queda

$$\lambda_0 = \frac{1 - \gamma_0^2}{\gamma_0} \quad (4.6)$$

Por tanto, si $\lambda_0 \neq 0$, se ha de cumplir que $\gamma_0 \neq 1$. De (4.3) se tiene:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{\gamma_0} - \gamma, \\ M = 2 - \frac{\gamma}{\gamma_0}, \\ D = \frac{1}{\gamma_0} - \gamma. \end{cases} \quad (4.7)$$

De (3.5) despreciando los términos de segundo orden, se tiene:

$$\begin{cases} T = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + 2\sigma_1 \varepsilon, \\ M = 1 + 2\omega_1 \varepsilon + 2\lambda_0 \sigma_1 \varepsilon, \\ D = \lambda_0 + 2\omega_1 \varepsilon \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon. \end{cases} \quad (4.8)$$

Igualando las expresiones de T , M y D en (4.7) y (4.8), usando (4.6) y definiendo $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon$, resolvemos el sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (λ_1 , σ_1 y ω_1), obteniendo

$$\lambda_1 = -\gamma_0^4 \frac{1 + \gamma_0^2}{1 + \gamma_0^6}, \quad \sigma_1 = \frac{\gamma_0^4 - 1}{2(1 + \gamma_0^6)} \quad y \quad \omega_1 = -\frac{\gamma_0(1 + \gamma_0^2)}{2(1 + \gamma_0^6)}.$$

Si $\lambda_0 = 0$ estamos reproduciendo el caso de Triple-Zero, entonces se tiene que $\gamma_0 = \alpha + \beta$, por tanto, su valor crítico ($T = M = D = 0$) es:

$$2 = \gamma(\alpha + \beta) \Leftrightarrow 2 = (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2 = \gamma_0^2 \Leftrightarrow \gamma_0 = \sqrt{2}$$

Con los invariantes definidos, podemos escribir las ecuaciones de cierre descritas en el capítulo 3 como función de los parámetros del circuito, para así aplicar el método de continuación y trazar las diferentes curvas.

4.2. Estudios de equilibrios (estabilidad)

4.2.1. Soluciones de equilibrio

Tal y como se ha desarrollado en el apartado (3.2), las soluciones de equilibrio del sistema son aquellas que hacen que el campo vectorial del sistema (4.2) se anule, y nos queda

$$(\alpha - \gamma)x - y + \beta \text{sat}(x) = 0 \quad (4.9a)$$

$$(2 - \alpha\gamma)x - z - \beta\gamma \text{sat}(x) = 0 \quad (4.9b)$$

$$(\alpha - \gamma)x + \beta \text{sat}(x) = 0 \quad (4.9c)$$

Empezando por (4.9c)

$$(\gamma - \alpha)x = \beta \text{sat}(x)$$

Hay que analizar varios posibles casos:

- Caso $\gamma \leq \alpha$: entonces la recta $(\gamma - \alpha)x$ tiene pendiente no positiva, por tanto la única solución posible es $x = 0$. Sustituyendo en (4.9a) y (4.9b) obtenemos que el origen $(0, 0, 0)$ es solución de equilibrio.
- Caso $\gamma > \alpha$: suceden tres posibles subcasos:
 1. $\gamma - \alpha > \beta$: el origen $(0, 0, 0)$ vuelve a ser solución de equilibrio.
 2. $\gamma - \alpha = \beta$: Todo valor de $x \in [-1, 1]$ es solución:

$$X_{Eq} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (2 - (\alpha + \beta)^2)x \end{pmatrix}$$

3. $0 < \gamma - \alpha < \beta$: el origen vuelve a ser solución, pero además aparecen dos puntos simétricos:

$$X_{Eq}^+ = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\gamma-\alpha} \\ 0 \\ \frac{\beta(2-\gamma^2)}{\gamma-\alpha} \end{pmatrix} X_{Eq}^- = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\gamma-\alpha} \\ 0 \\ \frac{-\beta(2-\gamma^2)}{\gamma-\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

4.2.2. Estabilidad del origen

Para que el origen sea estable, la matriz de la zona central A_C tiene que cumplir las condiciones de Hurwitz, las cuales son:

$$\begin{cases} T < 0 \\ D < 0 \\ MT - D < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Sustituyendo los valores de T , M y D correspondientes a los parámetros del circuito en (4.11), obtenemos las condiciones necesarias para que el origen sea estable:

$$\begin{cases} T = D = \alpha + \beta - \gamma \\ M = 2 - \gamma(\alpha + \beta) \end{cases} \quad (4.12)$$

De las expresiones $T = D < 0$ y $MT - D < 0$ obtenemos las condiciones que ha de cumplir el circuito:

$$\begin{cases} \alpha + \beta < \gamma \\ (\alpha + \beta - \gamma)[1 - \gamma(\alpha + \beta)] < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Analicemos la segunda condición de (4.13). Por una parte, el término $(\alpha + \beta - \gamma)$ debe ser negativo (primera condición de 4.13), por lo tanto, el término $[1 - \gamma(\alpha + \beta)]$ tiene que ser positivo para que así el producto sea negativo y se cumpla la condición $MT - D < 0$. Así desarrollando la expresión $[1 - \gamma(\alpha + \beta)]$ obtenemos la segunda de las condiciones que debe cumplir el circuito:

$$\alpha + \beta < \gamma < \frac{1}{\alpha + \beta} \quad (4.14)$$

En la figura (4.3) se han representado ambas condiciones:

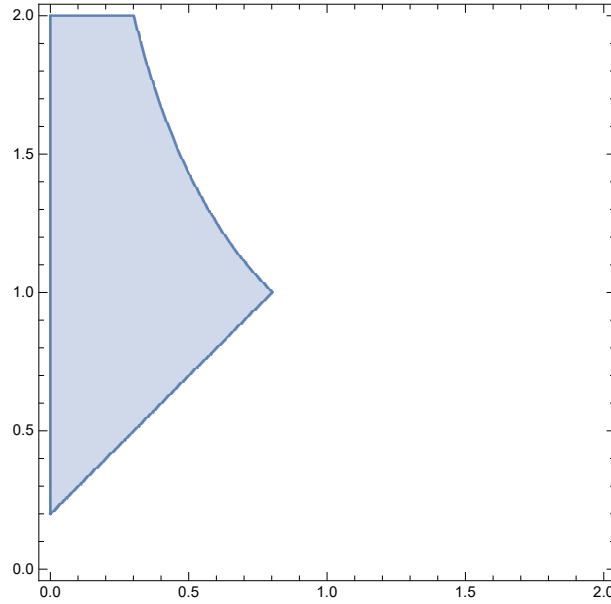


Figura 4.3: Condiciones que ha de cumplir el circuito para que el origen sea estable. El área de color azul del plano $(\alpha - \gamma)$ corresponde a la zona de estabilidad.

4.2.3. Estabilidad de los equilibrios de la zona externa

En este apartado se estudiará el equilibrio correspondiente a las zonas externas del sistema, es decir, correspondiente a la matriz A_R . Al igual que en el apartado anterior, la matriz A_R debe cumplir las condiciones de Hurwitz:

$$\begin{cases} t < 0 \\ d < 0 \\ mt - d < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Sustituyendo los valores de t , m y d correspondientes a los parámetros del circuito en (4.15), obtenemos las condiciones necesarias para que el equilibrio en las zonas externas sea estable:

$$\begin{cases} t = d = \alpha - \gamma \\ m = 2 - \alpha\gamma \end{cases} \quad (4.16)$$

De las expresiones $t = d < 0$ y $mt - d < 0$ obtenemos las condiciones que ha de cumplir el circuito:

$$\begin{cases} \alpha < \gamma \\ (\alpha - \gamma)[1 - \alpha\gamma] < 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

De la segunda expresión de (4.17) sabemos que $(\alpha - \gamma)$ es negativo debido a la primera condición, por tanto, el término $[1 - \alpha\gamma]$ debe ser positivo. Así obtenemos las condiciones que debe cumplir el circuito para que el equilibrio en las zonas estables sea estable:

$$\alpha < \gamma < \frac{1}{\alpha} \quad (4.18)$$

En la figura (4.4) se han representado ambas condiciones:

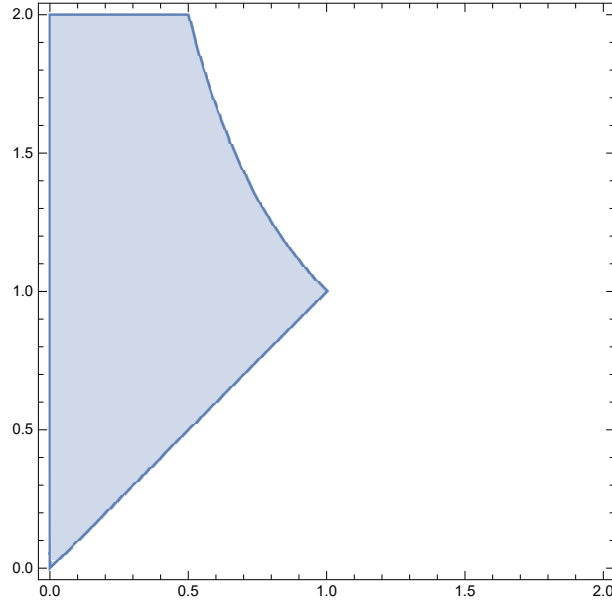


Figura 4.4: Condiciones que ha de cumplir el circuito para que el equilibrio en las zonas externas sea estable. El área de color azul del plano $(\alpha - \gamma)$ corresponde a la zona de estabilidad.

4.2.4. Zona correspondiente a tres equilibrios

En este apartado se va a estudiar la zona del plano $(\alpha - \gamma)$ en el que coexisten tres equilibrios. Para ello se debe cumplir la condición $\det(A_C)\det(A_R) <$

0, por tanto

$$dD < 0 \quad (4.19)$$

Sustituyendo en (4.19) los valores de los invariantes del circuito, obtenemos la condición para que coexistan los tres equilibrios:

$$(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) < 0 \quad (4.20)$$

Para que esta inecuación se cumpla tenemos dos posibles opciones:

1. $(\alpha - \gamma) < 0$; $(\alpha + \beta - \gamma) > 0$
2. $(\alpha - \gamma) > 0$; $(\alpha + \beta - \gamma) < 0$. Este caso no es posible debido a que $\beta > 0$ y por tanto, $(\alpha - \gamma) > 0$ y $(\alpha + \beta - \gamma) < 0$ son incompatibles.

Finalmente obtenemos las condiciones que debe cumplir el circuito para que coexistan tres equilibrios:

$$\alpha < \gamma < \alpha + \beta \quad (4.21)$$

En la figura (4.5) se han representado ambas condiciones:

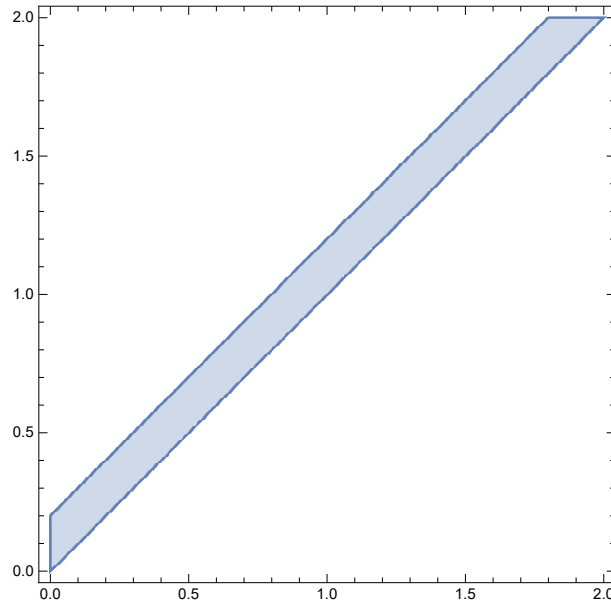


Figura 4.5: Condiciones que ha de cumplir el circuito para que coexistan tres equilibrios. El área de color azul del plano $(\alpha - \gamma)$ corresponde a la zona de existencia.

4.3. Estudio de bifurcaciones

En este apartado estudiaremos las diferentes bifurcaciones que se producen en el sistema en el plano $(\alpha - \gamma)$. Para ello se trabajará con las matrices A_C y A_R y las diferentes propiedades que deben cumplir para cada tipo de bifurcación.

4.3.1. Bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite

La bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite (FCCL) asociada al origen se origina cuando el par de autovalores complejos conjugados $\sigma \pm iw$ cruzan el eje imaginario para el valor crítico de bifurcación, aparte de un autovalor real λ . Para que se produzca el cruce de los autovalores complejos por el eje imaginario, la matriz A_C debe cumplir la condición:

$$T = D/M, \text{ con } M > 0 \text{ (ver Teorema 1.1 de [5])} \quad (4.22)$$

Las condiciones (4.22) en función de los parámetros del circuito da lugar a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\alpha+\beta} \\ \gamma < \frac{2}{\alpha+\beta} \end{cases} \quad (4.23)$$

La segunda condición de se cumple trivialmente cuando se cumple la primera. Además, el coeficiente de no degeneración $\delta = D(M - m) + M(d - Mt)$ (ver Teorema 1.1 de [5]), que en función de los parámetros del circuito queda

$$\delta = -\beta\gamma(\alpha + \beta - \gamma) + (\alpha - \gamma)(-1 + \gamma(\alpha + \beta))(2\gamma(\alpha + \beta)) \quad (4.24)$$

es distinto de cero sobre toda la curva de bifurcación $\gamma = \frac{1}{\alpha+\beta}$ excepto en el punto $(\alpha = 1 - \beta, \gamma = 1)$. Dicho Teorema 1.1 establece que el Ciclo Límite existe cuando $\delta(T - \frac{D}{M}) > 0$, condición que se verifica para los valores de γ por encima de la curva $\gamma = \frac{1}{\alpha+\beta}$, para $\alpha \neq 1 - \beta$. En la gráfica (4.6) se han representado los puntos en los que se produce el Ciclo Límite.

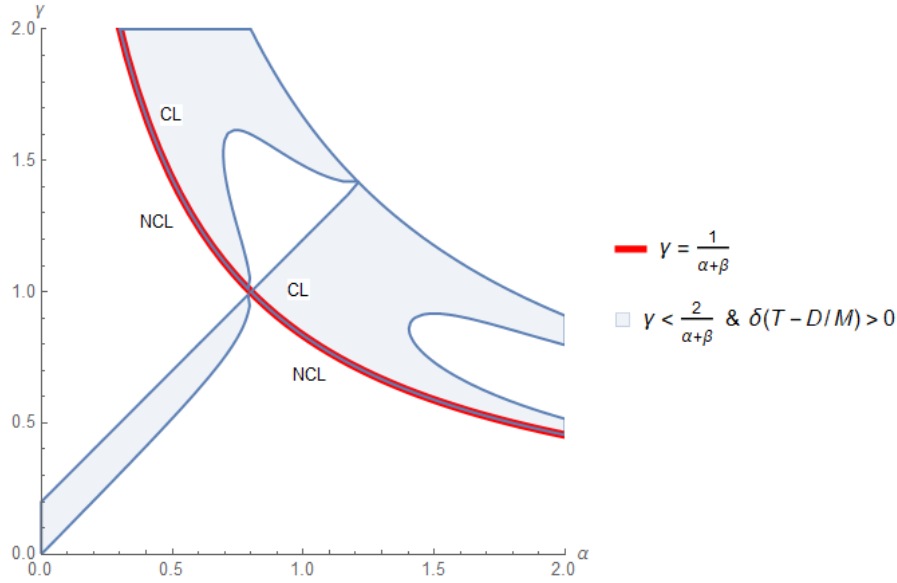


Figura 4.6: Curva de bifurcación FCCL y ciclos límites existentes en sus cercanías. Aquellas zonas marcadas con “NCL” corresponde con aquellas en las que no se produce Ciclo Límite, mientras que aquellas marcadas con “CL” corresponden con las que sí se produce Ciclo Límite.

4.3.2. Bifurcación Hopf del infinito

La bifurcación Hopf del infinito se produce cuando un par de autovalores complejos conjugados $\sigma \pm iw$, de la matriz A_R de las zonas externas, cruzan el eje imaginario del plano complejo. Para que se produzca dicho cruce, la matriz A_R debe cumplir la condición:

$$t = d/m, \text{ con } m < 0 \text{ (ver Teorema 5.10 de [8])} \quad (4.25)$$

Las condiciones (4.25) en función de los parámetros del circuito da lugar a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\alpha} \\ \gamma < \frac{2}{\alpha} \end{cases} \quad (4.26)$$

La segunda condición se cumple trivialmente cuando se cumple la primera. Además, el coeficiente de no degeneración $\delta = d(m - M) + m(D - mT)$ (ver Teorema 1 de [7]), que en función de los parámetros del circuito queda

$$\gamma = \beta\gamma(\alpha - \gamma) + (\alpha + \beta - \gamma)(-1 + \alpha\gamma)(2 - \alpha\gamma) \quad (4.27)$$

es distinto de cero sobre toda la curva de bifurcación $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ excepto en el punto $(\alpha = 1, \gamma = 1)$. Dicho Teorema 1 establece que el Ciclo Límite existe cuando $\delta(t - \frac{d}{m}) > 0$, condición que se verifica para los valores de γ por debajo de la curva $\gamma = \frac{1}{\alpha}$, para $\alpha \neq 1$. En la gráfica (4.7) se han representado los puntos en los que se produce el Ciclo Límite.

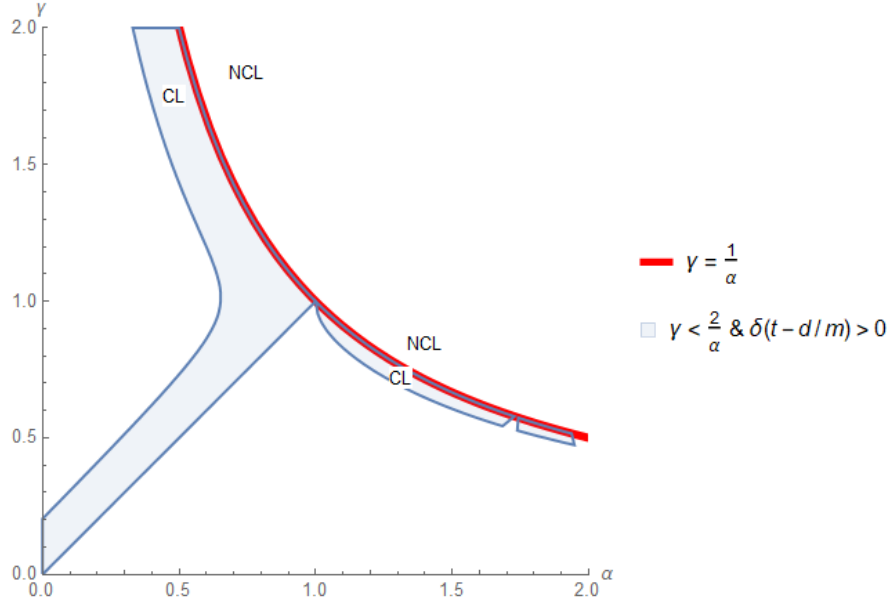


Figura 4.7: Curva de bifurcación Hopf del infinito y ciclos límites existentes en sus cercanías. Aquellas zonas marcadas con “NCL” corresponde con aquellas en las que no se produce Ciclo Límite, mientras que aquellas marcadas con “CL” corresponden con las que sí se produce Ciclo Límite.

4.3.3. Hopf Zero del Origen

Para este caso estudiamos la matriz A_C correspondiente a la zona central. Para poder realizar el estudio de esta bifurcación, tomaremos la siguiente estructura para los autovalores de A_C (siguiendo la hipótesis de [4]): $\lambda = -\epsilon$ para el autovalor real, y $\rho\epsilon \pm \omega i$ para el par complejo imaginario, donde ϵ será un parámetro de bifurcación. Así, los invariantes T , M y D de la matriz A_C son de la forma:

$$\begin{cases} T(\epsilon) = \epsilon(2\rho - 1) \\ M(\epsilon) = \rho\epsilon^2(\rho - 2) + \omega^2 \\ D(\epsilon) = -\epsilon(\rho^2 + \omega^2) \end{cases}$$

Cuando el parámetro de bifurcación $\epsilon = 0$, se produce el cruce por el eje imaginario del plano complejo de los autovalores. Esto implica que para el valor crítico de bifurcación los invariantes T , M y D sean igual a cero, dando lugar a

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ \gamma < \frac{2}{\alpha + \beta} \end{cases} \quad (4.28)$$

Combinando ambas ecuaciones de (4.28), obtenemos: $\gamma = \alpha + \beta < \sqrt{2}$.

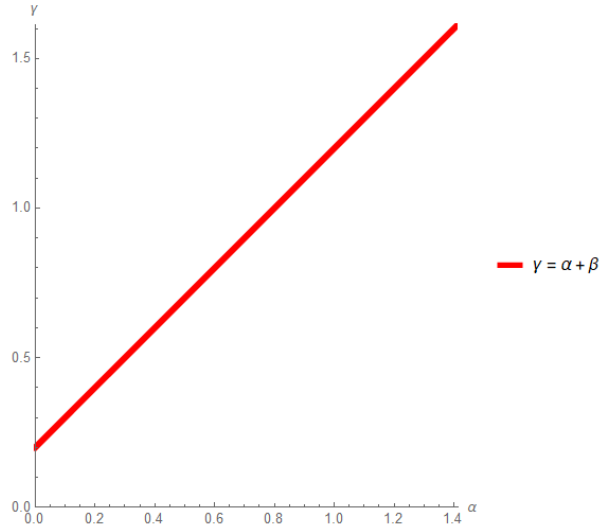


Figura 4.8: *Puntos correspondientes a la bifurcación Hopf Zero del Origen.*

4.3.4. Hopf Zero del Infinito

Para este caso estudiamos la matriz A_R correspondiente a la zona externa. Por analogía al caso anterior (Hopf zero del origen), los invariantes t , m y d de A_R tienen que ser igual a cero, dando lugar a

$$\begin{cases} \gamma = \alpha \\ \gamma < \frac{2}{\alpha} \end{cases} \quad (4.29)$$

Combinando ambas ecuaciones de (4.29), obtenemos: $\gamma = \alpha < \sqrt{2}$.

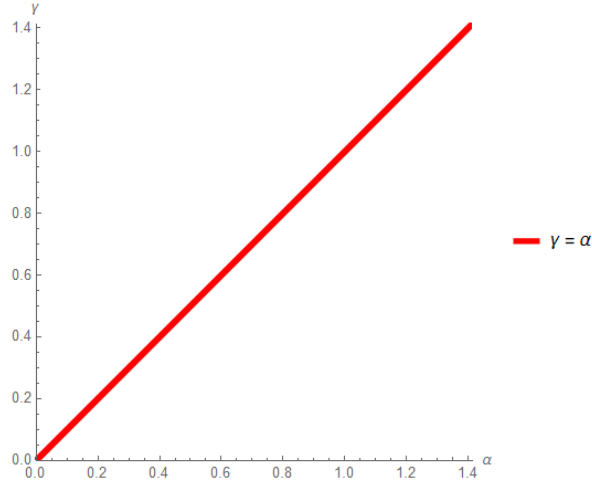


Figura 4.9: *Puntos correspondientes a la bifurcación Hopf Zero del Infinito.*

4.3.5. Triple zero del origen

Este tipo de bifurcación se produce cuando los tres autovalores de la matriz A_C correspondiente a la zona central son nulos para el valor crítico de bifurcación. Para ello, los invariantes T , M y D de A_C deben ser igual a cero, dando lugar a

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ \gamma = \frac{2}{\alpha + \beta} \\ \gamma = \alpha + \beta \end{cases} \quad (4.30)$$

El anterior sistema (4.30) se trata en realidad de un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, debido a que la primera y tercera ecuación son la misma. Por

tanto, expresaremos α y γ en función del parámetro β . Así, obtenemos:

$$\alpha = \sqrt{2} - \beta ; \quad \gamma = \sqrt{2} \quad (4.31)$$

Por lo tanto, el punto triple zero del origen se produce en las coordenadas $(\sqrt{2} - \beta, \sqrt{2})$ del plano $(\alpha - \gamma)$.

4.3.6. Triple zero de los equilibrios de la zona externa

Para este caso estudiamos la matriz A_R correspondiente a la zona externa. Por analogía al caso anterior (Triple zero del origen), los invariantes t , m y d de A_R deben ser igual a cero, dando lugar a

$$\begin{cases} \gamma = \alpha \\ \gamma = \frac{2}{\alpha} \\ \gamma = \alpha \end{cases} \quad (4.32)$$

Igualando las expresiones de (4.32), obtenemos la solución $\alpha = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{2}$.

Finalmente representamos todas las curvas obtenidas anteriormente para así determinar el diagrama de bifurcaciones, el cual será de utilidad para el estudio de las curvas Silla-Nodo del sistema.

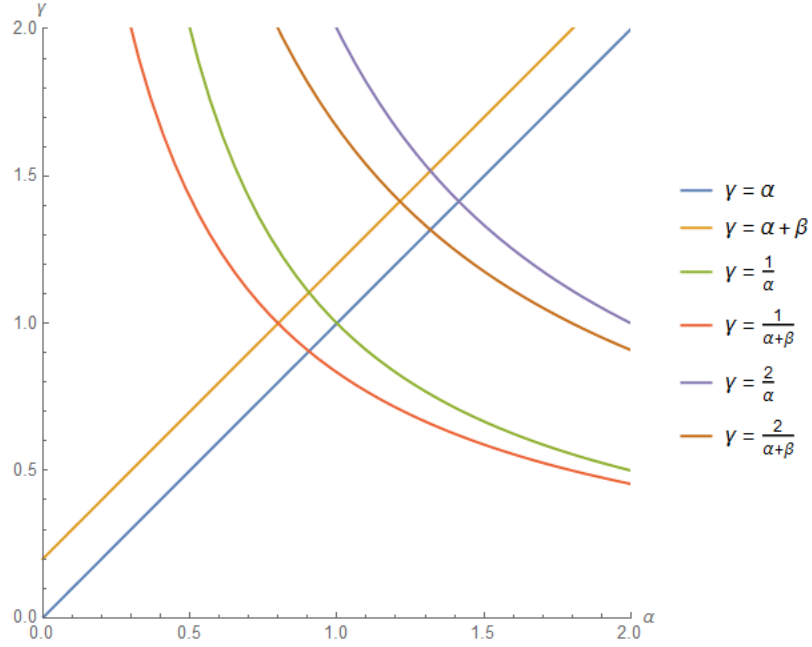


Figura 4.10: Diagrama de bifurcaciones.

4.4. Análisis de bifurcaciones

A partir de los resultados obtenidos en los apartados desarrollados anteriormente (4.2 y 4.3), analizaremos con más detalle las bifurcaciones que se producen en el oscilador electrónico BVP estudiado.

Considerando el sistema expresado en la forma de Liénard:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -1 & 0 \\ 2 - \alpha\gamma & 0 & -1 \\ \alpha - \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \text{sat}(x),$$

Asumiendo que los parámetros del circuito, α , β y γ , toman una serie determinada de valores, se obtienen los siguientes casos:

1. Con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y con $\gamma_0 = \frac{1}{\alpha+\beta}$ fijo:
 - a) Para $\gamma = \gamma_0$, se produce una bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite (FCCL).

- b) Para $\gamma > \gamma_0$ y suficientemente pequeño, aparece un ciclo límite. Si se cumple que $\alpha + \beta < 1$, y por tanto, $\gamma_0 > 1$, el ciclo límite es asintóticamente estable.

2. Con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \neq 1$ y $0 < \gamma_0 = \alpha + \beta < \sqrt{2}$ fijo:

- a) Para $\gamma > \gamma_0$, el origen es el único equilibrio del sistema. Además, si se cumple $\gamma\gamma_0 < 1$, éste es asintóticamente estable.
- b) Para $\gamma = 0$, el sistema experimenta una bifurcación propia de los sistemas diferenciales lineales a trozos, análoga a la bifurcación Hopf Zero.
- c) Para $\gamma < \gamma_0$ y suficientemente pequeño en valor absoluto, aparecen tres ciclos límite simultáneamente, uno de ellos trizonal y los otros dos bizionales, estando acompañados de dos puntos de equilibrio adicionales.
- 1) Si se cumple que $\gamma_0 < 1$, el ciclo límite producido por la bifurcación trizonal es estable, mientras que el ciclo límite producido por la bifurcación bizonal es inestable. Los puntos de equilibrio que bifurcan serán estables siempre y cuando que $\gamma_0 < 1$.
- 2) Si se cumple que $1 < \gamma_0 < \sqrt{2}$, el ciclo límite producido por la bifurcación trizonal es inestable, mientras que el ciclo límite producido por la bifurcación bizonal es estable. Los puntos de equilibrio que bifurcan serán estables siempre y cuando que $\gamma_0 < 1/\alpha$.

En la figura (4.11) se han representado las zonas con los diferentes puntos de equilibrio del sistema y los distintos ciclos límites que se producen en el sistema.

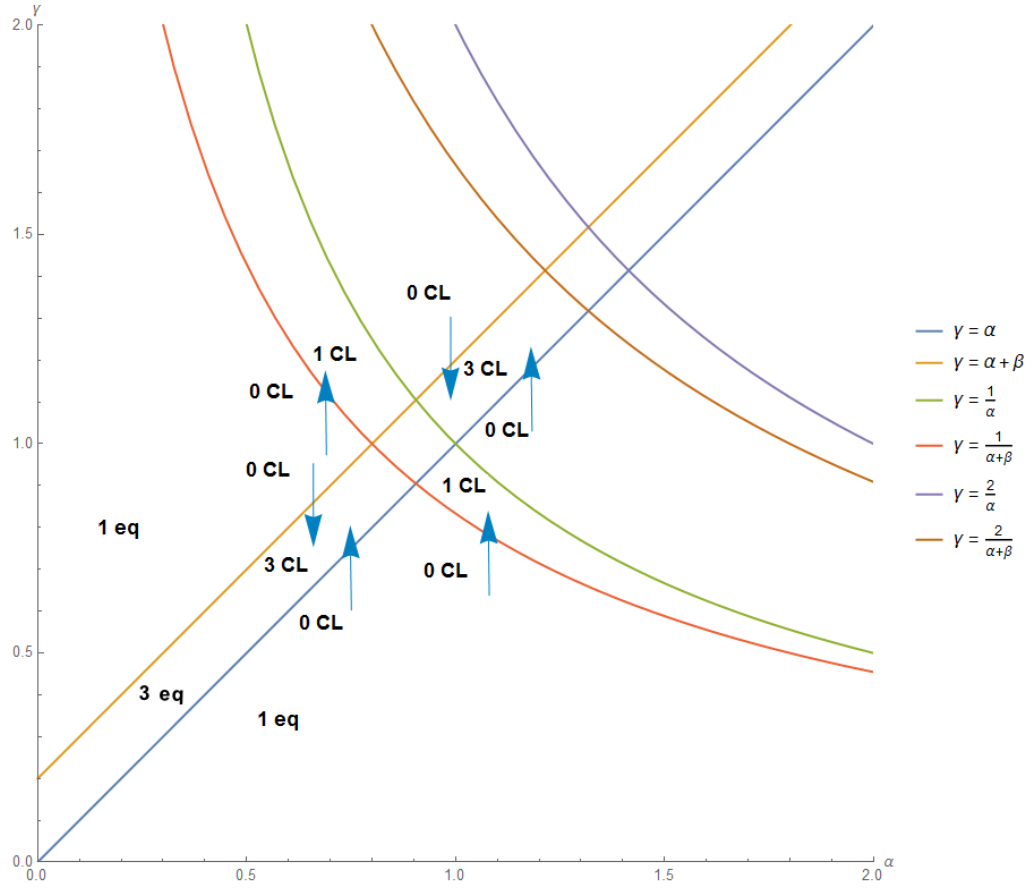


Figura 4.11: Diagrama de bifurcaciones del sistema. En él se han indicado las zonas correspondientes a un equilibrio (1 eq) o a tres equilibrios (3 eq) y las zonas correspondientes a un ciclo límite (1 CL) o a tres ciclos límite (3 CL).

En la figura (4.12), se muestra el plano $\gamma = \alpha + \beta$ donde tiene lugar la bifurcación de *Hopf-zero* y la superficie $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ donde tiene lugar la bifurcación Foco-Centro-Ciclo-Límite (FCCL). La recta roja tiene la expresión $\gamma = \alpha + \beta = \sqrt{2}$, obtenida para cuando $T = M = D = 0$.

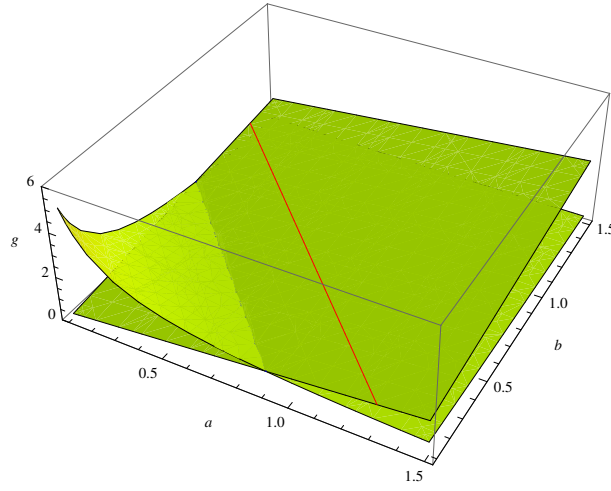


Figura 4.12: *Bifurcaciones Hopf-zero y FCCL correspondientes a la superficie $\gamma = \alpha + \beta$ y plano $\gamma = \frac{1}{\alpha + \beta}$ respectivamente.*

Capítulo 5

Continuación numérica en oscilador BVP

Este capítulo está destinado al desarrollo de de las curvas de bifurcación mediante el método de continuación numérica. Para ello aplicaremos la teoría expuesta en el apartado 2.4 *Bifurcaciones* y las propiedades desarrolladas en [5] y [7], las cuales establecen que para sistemas lineales a trozos:

- los multiplicadores de un ciclo límite bizonal están incluidos entre los autovalores del producto de matrices $M = e^{A_C \tau_C} \times e^{A_R \tau_R}$ (ver Prop. 3 de [7]).
- los multiplicadores de un ciclo límite trizonal están incluidos entre los autovalores del producto de matrices $M = e^{A_C \tau_C} \times e^{A_R \tau_R} \times e^{A_C \tau_C} \times e^{A_R \tau_R}$ (ver Prop. 3.2 de [5]).

Sean $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ los autovalores de M, uno siempre vale 1, mientras que los otros dos autovalores serán los multiplicadores característicos del ciclo límite. Dichos autovalores añaden la ecuación de cierre necesaria para cada tipo de bifurcación:

Bifurcación Silla-Nodo: en este caso los autovalores de M toman los valores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, \lambda_3)$. A partir del determinante y la traza de M obtenemos la ecuación de cierre necesaria:

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_3 \text{traza}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_3$$

Así pues, a partir de ambas expresiones llegamos a la ecuación de cierre:

$$\det(M) - \text{traza}(M) + 2 = 0 \quad (5.1)$$

Bifurcación Duplicación de Periodo: en este caso los autovalores de M toman los valores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -1, \lambda_3)$. Siendo el determinante y la traza de M :

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\lambda_3 \text{traza}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3$$

Así pues, a partir de ambas expresiones llegamos a la ecuación de cierre:

$$\det(M) + \text{traza}(M) = 0 \quad (5.2)$$

Bifurcación Toro: en este caso los autovalores de M toman los valores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, a + bi, a - bi)$, donde dicho el par complejo se encuentra sobre el círculo unidad: $a^2 + b^2 = 1$. El determinante de M queda de la forma:

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a^2 + b^2 = 1$$

Así obtenemos la ecuación de cierre:

$$\det(M) - 1 = 0 \quad (5.3)$$

Además de comprobar que $[\text{traza}(M) - 1] < 2$.

Existen condiciones adicionales que deben cumplir las soluciones de las ecuaciones de cierre para verificar que realmente corresponden a ciclos límites del sistema. El procedimiento empleado para su detección y posterior continuación de las curvas de bifurcación procede de la siguiente manera: Partimos de un punto perteneciente a un ciclo límite y nos movemos sobre la vertical de α continuando dicho ciclo límite, es decir, una vez detectado el punto, mantenemos α constante y variamos γ . Para ello se aplica el método de pseudo longitud de arco, descrito en el apartado 3.4.2, en el cual hay que tener en cuenta una serie de condiciones:

1. Los tiempos de vuelo deben ser positivos: $\tau_C > 0, \tau_R > 0$.
2. El jacobiano no puede cambiar de signo.
3. Para el caso de órbitas bizonales, éstas no pueden invadir la tercera zona. Es decir, para la órbita de dos zonas que atraviesa la frontera $x = 1$, se debe cumplir que $-1 < x(\tau)$ para $\tau \in [0, \tau_C]$.
4. La trayectoria del ciclo límite debe recorrerse en sentido positivo. Para la órbita que parte de la zona central y alcanza la frontera $x = 1$, debe cumplirse que $\dot{X}\big|_{x=1} > 0$. Sustituyendo $x = 1$ en (3.2), obtenemos la condición:

$$\alpha + \beta - \gamma > 0 \quad (5.4)$$

5. Control del producto M. Esta condición comprueba si los autovalores distintos de 1 se encuentran dentro o fuera del círculo unidad y cuando lo cruzan. Matemáticamente, para que los multiplicadores se encuentren dentro del círculo unidad se debe cumplir:

$$|det(M)| < 1 \text{ y } |traza(M) - 1| < 1 + det(M) \quad (5.5)$$

El momento en que los autovalores crucen el círculo unidad, la continuación se detiene y se analiza el valor de dichos autovalores. En función de dicho valor, se clasifica en una curva de bifurcación u otra. Con dicha información, se añadirá una ecuación más de cierre al sistema, que es la que determinará la curva de bifurcación buscada y se continuará partiendo del punto en que el autovalor sale del círculo unidad mediante el método de pseudo longitud de arco.

5.1. Continuación numérica de ciclos límites trizionales

5.1.1. Curvas Silla-Nodo correspondientes a ciclos límites trizionales

Para el cálculo de estas curvas empleamos el algoritmo de detección de curvas Silla-Nodo explicado al comienzo del capítulo. Al tratarse de ciclos límites trizionales, el apartado c) del algoritmo no se tiene en cuenta. Se van a estudiar una serie de zonas del plano $(\alpha - \gamma)$, las cuales son:

1. Para el valor de $\alpha=0.9$ y γ ligeramente por debajo de la recta $\gamma = \alpha + \beta$. En esta zona se continuará un ciclo límite de tres zonas correspondiente a la bifurcación Hopf Zero que se produce sobre $\gamma = \alpha + \beta$. Manteniendo constante el valor de α , variamos el valor de γ hasta encontrar un punto de bifurcación Silla-Nodo. Dicho punto es debido a un cambio del valor de los autovalores del producto M en el que uno de ellos cruza el círculo unidad por la parte positiva del eje real.

En las figuras (5.1) y (5.2) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.9$ en función de γ :

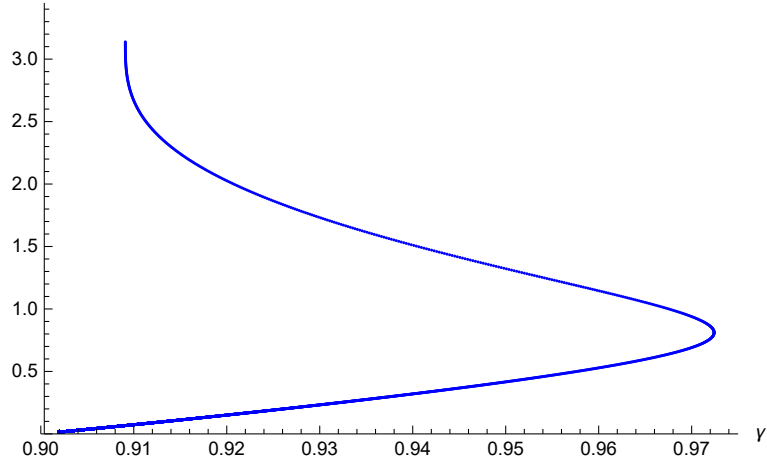


Figura 5.1: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 0.972)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

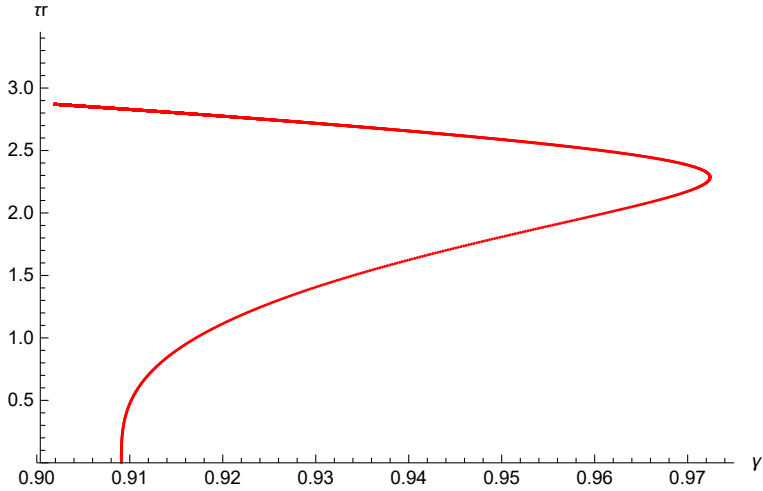


Figura 5.2: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 0.972)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

En la figura (5.3) se han representado los ciclos límites obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

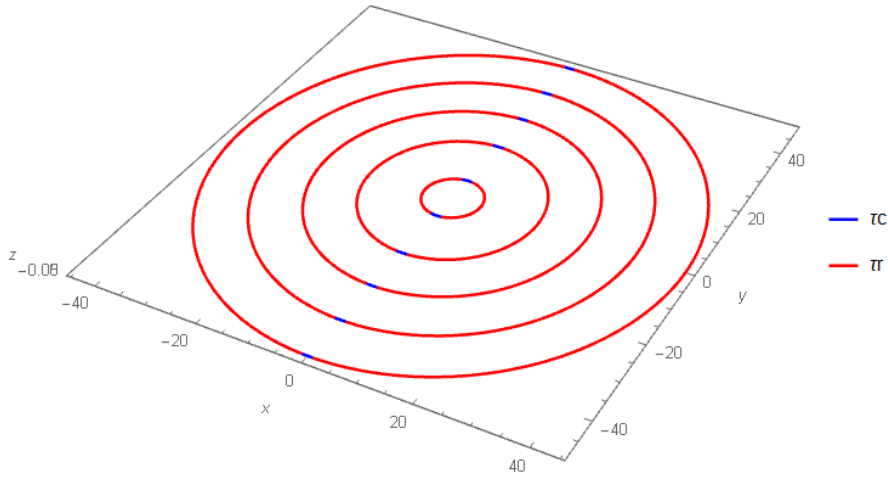


Figura 5.3: *Ciclos Límites obtenidos para $\alpha=0.9$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límites atraviesan las tres zonas del sistema.*

A partir de los puntos de Silla-Nodo obtenidos producidos por la bifurcación Hopf Zero, añadimos la ecuación de Silla-Nodo a las ecuaciones de cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha - \gamma)$.

2. Volvemos a repetir el mismo proceso que en el caso anterior, estudiando el ciclo límite correspondiente a $(\alpha, \gamma)=(0.9, 1.028)$. En las figuras (5.5) y (5.6) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.9$ en función de γ :

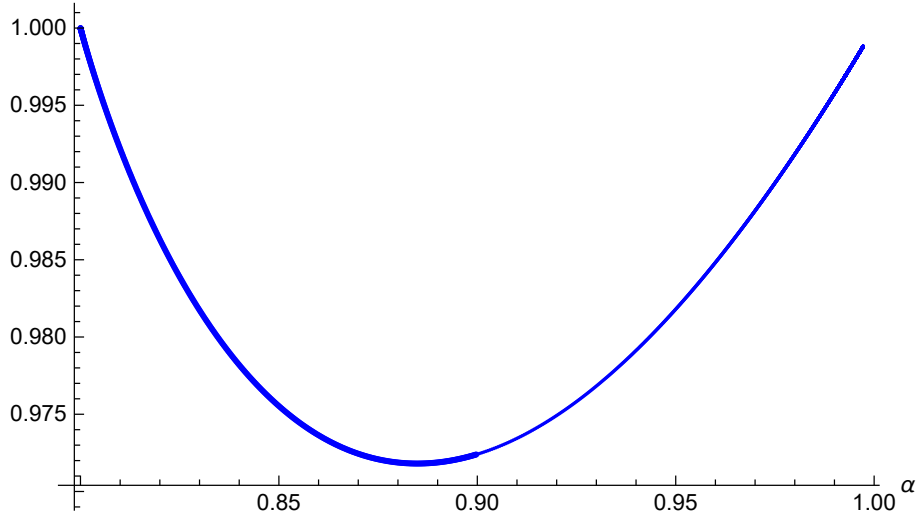


Figura 5.4: *Continuación numérica del ciclo límite trizonal producido por la bifurcación Hopf Zero a partir del punto Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (0.9, 0.972)$.*

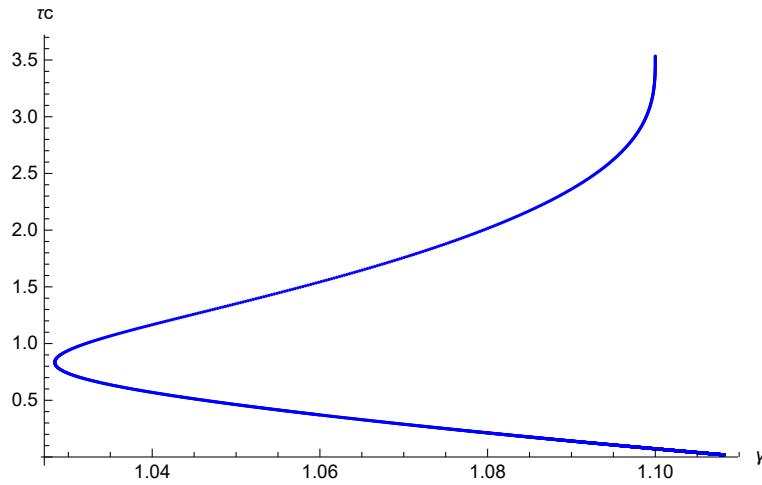


Figura 5.5: *Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha = 0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (0.9, 1.028)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.*

En las figuras (5.7) se han representado los ciclos límites obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

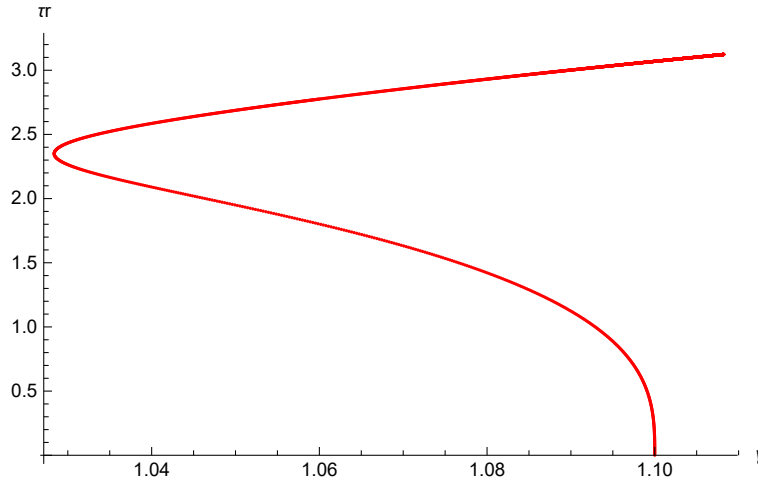


Figura 5.6: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 1.028)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

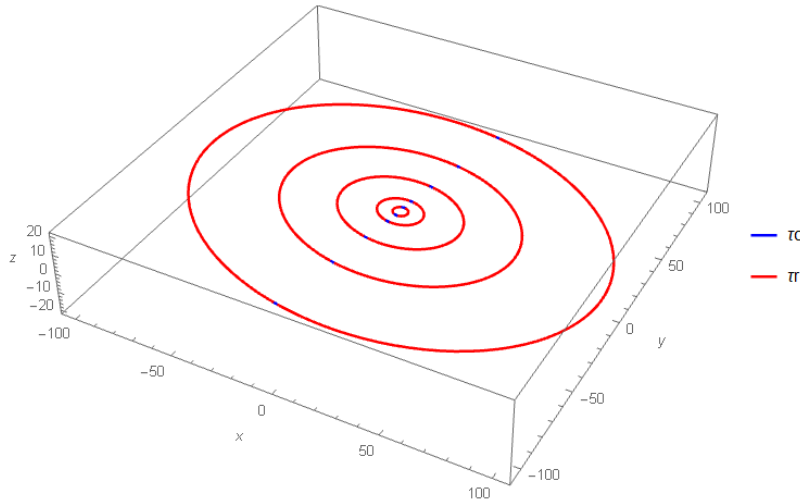


Figura 5.7: Ciclos Límites obtenidos para $\alpha=0.9$ para diversos valores de τ_C . Los ciclos límites atraviesan las tres zonas del sistema.

A partir de los puntos de Silla-Nodo obtenidos producidos por la bifurcación Hopf Zero, añadimos la ecuación de Silla-Nodo a las ecuaciones de cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el

plano $(\alpha - \gamma)$.

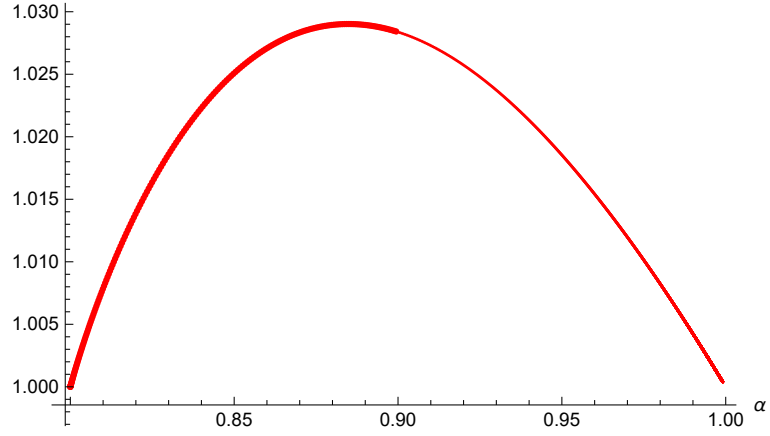


Figura 5.8: *Continuación numérica del ciclo límite trizonal producido por la bifurcación Hopf Zero a partir del punto Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (0.9, 1.028)$.*

3. El último ciclo límite estudiado es partiendo de un punto cercano a la degeneración triple zero. Dicho punto es $(\alpha, \gamma) = (\sqrt{2} - \beta, \sqrt{2})$. En las figuras (5.9) y (5.10) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo para $\alpha = \sqrt{2} - \beta$ en función de γ :

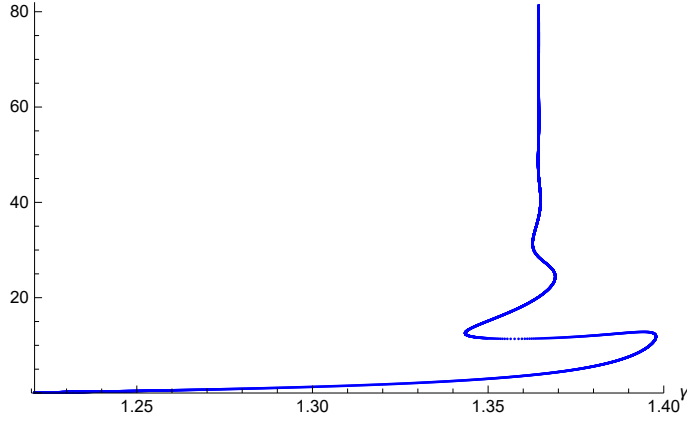


Figura 5.9: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha = \sqrt{2} - \beta$ en función de γ . Los puntos de Silla-Nodo presentes son producidos debido a la degeneración Triple Zero del Origen.

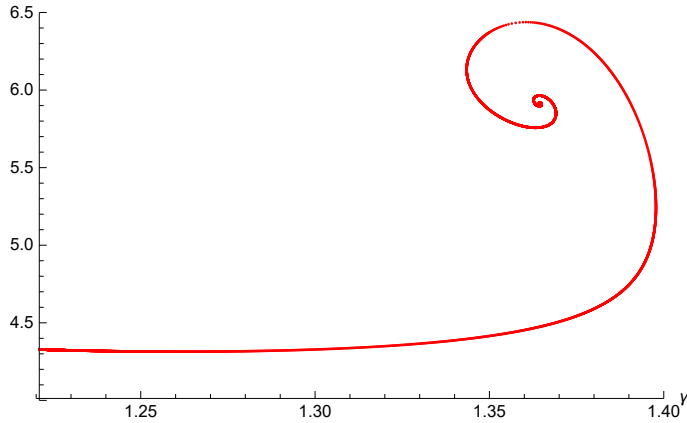


Figura 5.10: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha = \sqrt{2} - \beta$ en función de γ . Los puntos de Silla-Nodo presentes son producidos debido a la degeneración Triple Zero del Origen.

Las curvas obtenidas de la evolución de los tiempos de vuelo central τ_C y vuelo externo τ_R son típicas de una bifurcación homoclina tipo “Shilnikov” de un sistema tridimensional. Estas órbitas son trayectorias que parten de un punto de equilibrio X_0 Silla-Nodo con autovalores $\lambda_1(X_0) > 0 > \text{Re}\lambda_{2,3}(X_0) > 0$ y una bifurcación homoclina. Asumiendo

que se cumplen las condiciones:

$$\lambda_1(X_0) + \operatorname{Re}\lambda_{2,3}(X_0) > 0, \lambda_2(X_0) \neq \lambda_3(X_0)$$

Entonces, el sistema tiene un número infinito de ciclos límites en las proximidades del punto de equilibrio X_0 perteneciente a dicha órbita homoclina. Las órbitas nacen del punto de equilibrio y vuelven a dicho punto después de un tiempo infinito (Teorema 6.6 de [Kuznetsov]). Estas órbitas homoclinas están conectadas a la dinámica caótica de sistemas de diferentes áreas, como caos químico, fenómeno del ruido inducido y osciladores electroquímicos.

En la figura (5.11) se han representado las órbitas producidas para el tiempo de vuelo central τ_C y τ_R debido a la degeneración Triple Zero del Origen.

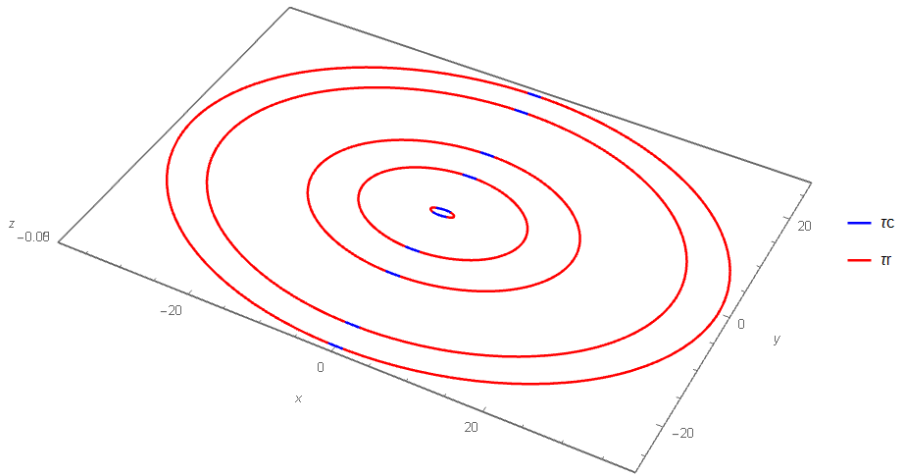


Figura 5.11: *Ciclos Límites obtenidos para $\alpha = \sqrt{2} - \beta$ para diversos valores de τ_C τ_R . Los ciclos límites atraviesan las tres zonas del sistema.*

A partir de los puntos de Silla-Nodo obtenidos producidos por la bifurcación Hopf Zero, añadimos la ecuación de Silla-Nodo a las ecuaciones de cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha - \gamma)$.

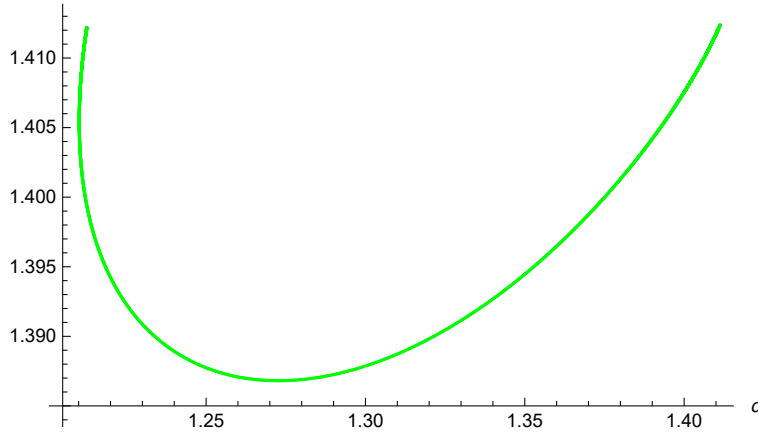


Figura 5.12: *Continuación numérica del ciclo límite trizonal producido por la degeneración Triple Zero a partir del punto Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (\sqrt{2} - \beta, 1.4037)$.*

5.2. Continuación numérica de ciclos límite bizonales

5.2.1. Curvas Silla-Nodo correspondientes a ciclos límite bizonales

Para el cálculo de estas curvas empleamos el algoritmo de detección de curvas Silla-Nodo explicado en el comienzo del capítulo. En este caso, al tratarse de ciclos límite bizonales, el apartado c) $y < \alpha + \beta - \gamma$ del algoritmo se tiene que cumplir.

La zona estudiada corresponde al rombo del plano $(\alpha - \gamma)$ comprendido entre $\alpha \in [0.8, 1]$ y $\gamma \in [0.9, 1.1]$. En esta zona se continuará un ciclo límite de dos zonas correspondiente a la bifurcación Hopf Zero que se produce sobre $\gamma = \alpha + \beta$. Manteniendo constante el valor de α , variamos el valor de γ hasta encontrar un punto de bifurcación Silla-Nodo. Dicho punto es debido a un cambio del valor de los autovalores del producto M en el que uno de ellos cruza el círculo unidad por la parte positiva del eje real. Para el estudio de dichos ciclos límite, se analizarán tres casos distintos dentro de la zona en cuestión:

1. Para $\alpha = 0.85$ y γ ligeramente por debajo de $\gamma = \alpha + \beta$. En las figuras

(5.13) y (5.14) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.85$ en función de γ :

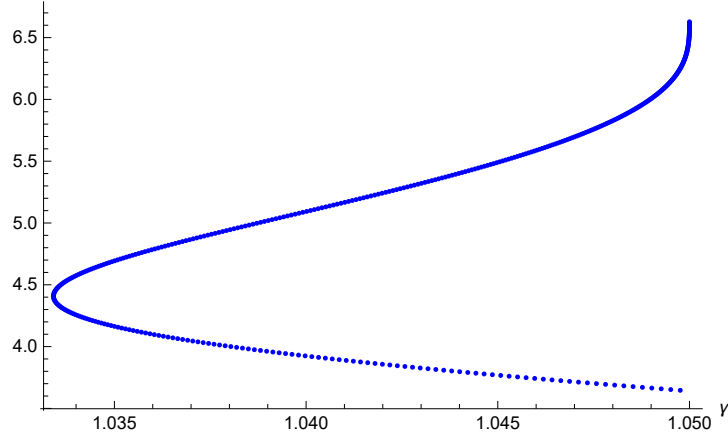


Figura 5.13: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha = 0,85$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (0.85, 1.033)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

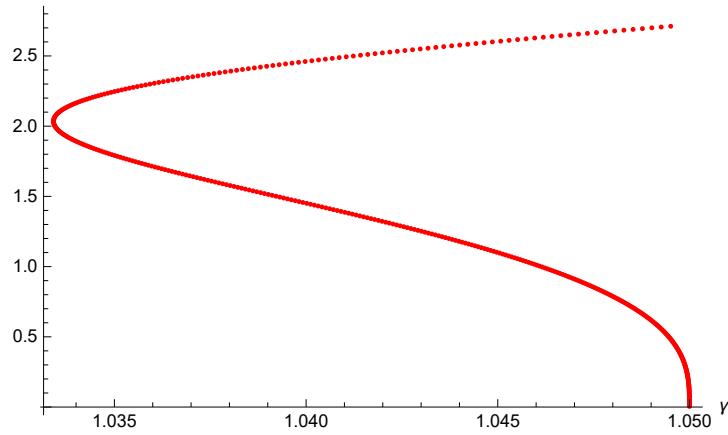


Figura 5.14: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha = 0,85$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma) = (0.85, 1.033)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES 81

Como se ha comentado anteriormente, al tratarse de un ciclo límite bizonal, se tiene que cumplir la condición $c) \gamma < 1.05 - \gamma$, condición que numéricamente se ha comprobado que deja de cumplirse cuando $\gamma = 1.05$. Así, teniendo en cuenta esta restricción, se obtiene que el tiempo de vuelo central τ_C no llega a anularse, tal y como se puede observar en la figura (5.13).

En la figura (5.15) se han representado los ciclos límite obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

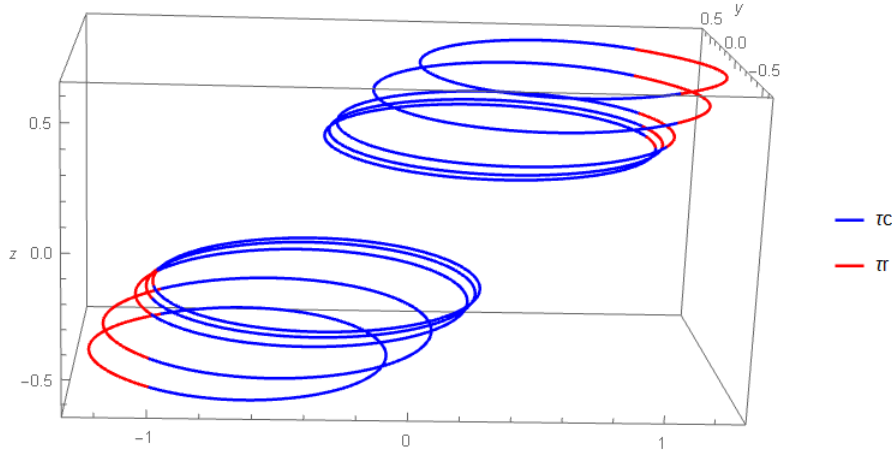


Figura 5.15: *Ciclos Límites obtenidos para $\alpha=0.85$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límite atraviesan las dos zonas del sistema.*

2. Para $\alpha=0.9$ y γ ligeramente por encima de $\gamma = \frac{1}{\alpha+\beta}$. En las figuras (5.16) y (5.17) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.9$ en función de γ :

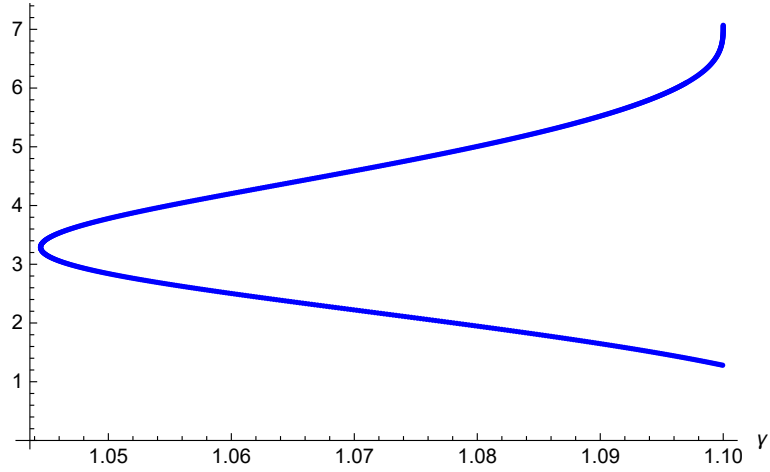


Figura 5.16: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 1.044)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

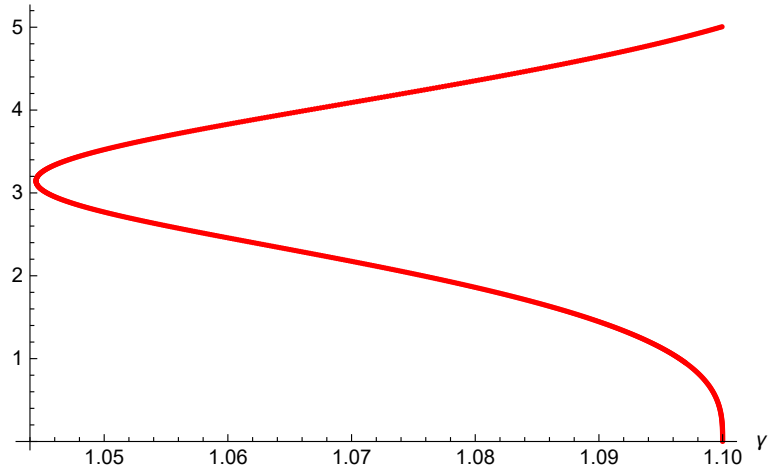


Figura 5.17: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha = 0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 1.044)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

Como se ha comentado anteriormente, al tratarse de un ciclo límite bizonal, se tiene que cumplir la condición c) $\gamma < 1.1 - \gamma$, condición que

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES83

numéricamente se ha comprobado que deja de cumplirse cuando $\gamma=1.1$. Así, teniendo en cuenta esta restricción, se obtiene que el tiempo de vuelo central τ_C no llega a anularse, tal y como se puede observar en la figura (5.16).

En la figura (5.18) se han representado los ciclos límites obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

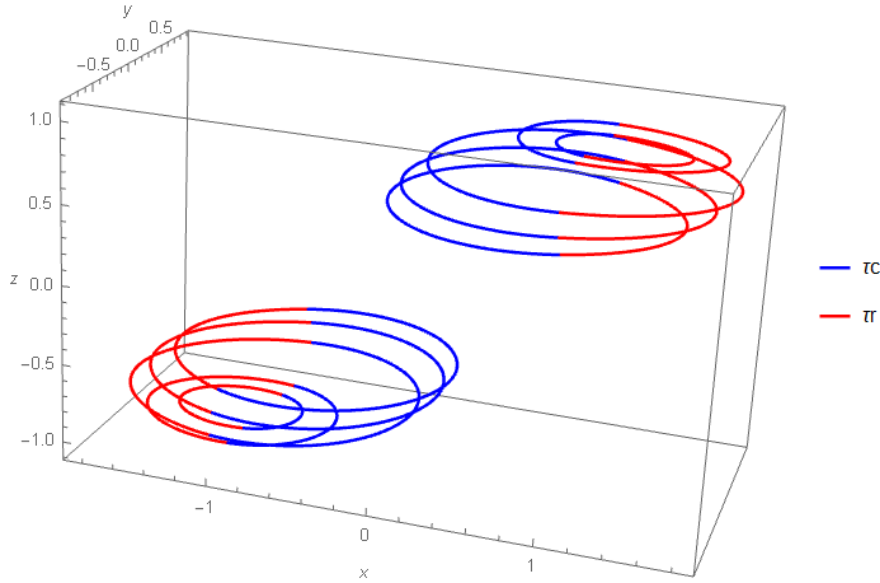


Figura 5.18: *Ciclos Límite obtenidos para $\alpha=0.9$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límites atraviesan las dos zonas del sistema.*

3. Para $\alpha=0.95$ y γ ligeramente por debajo de $\gamma = \alpha + \beta$. En las figuras (5.19) y (5.20) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.95$ en función de γ :

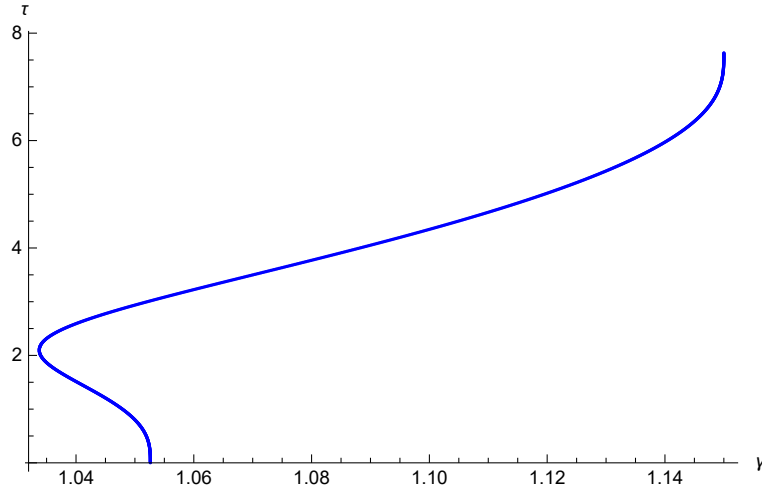


Figura 5.19: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=0.95$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.95, 1.044)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

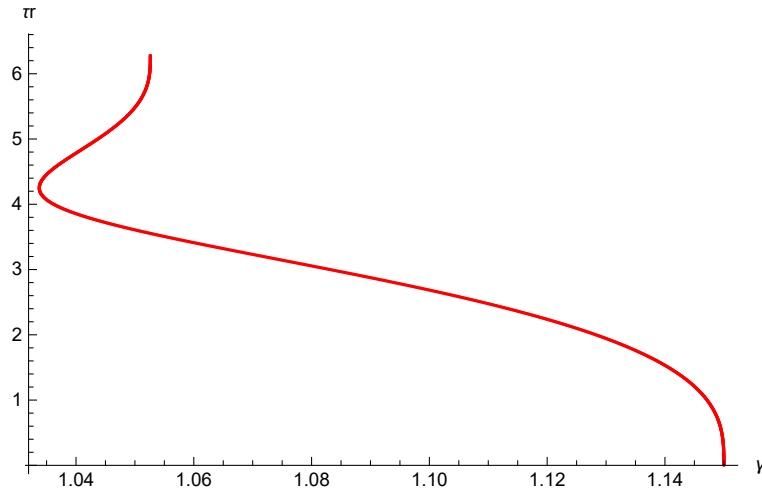


Figura 5.20: Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=0.95$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.95, 1.044)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.

Como se ha comentado anteriormente, al tratarse de un ciclo límite bizonal, se tiene que cumplir la condición c) $\gamma < 1.15 - \gamma$, condición que numéricamente se ha comprobado que se cumple hasta $\gamma=1.15$. En este

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES85

caso, al contrario que para $\alpha=0.85$ y $\alpha=0.9$, se obtiene que el tiempo de vuelo central τ_C llega a anularse, tal y como se puede observar en la figura (5.19).

En la figura (5.21) se han representado los ciclos límite obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

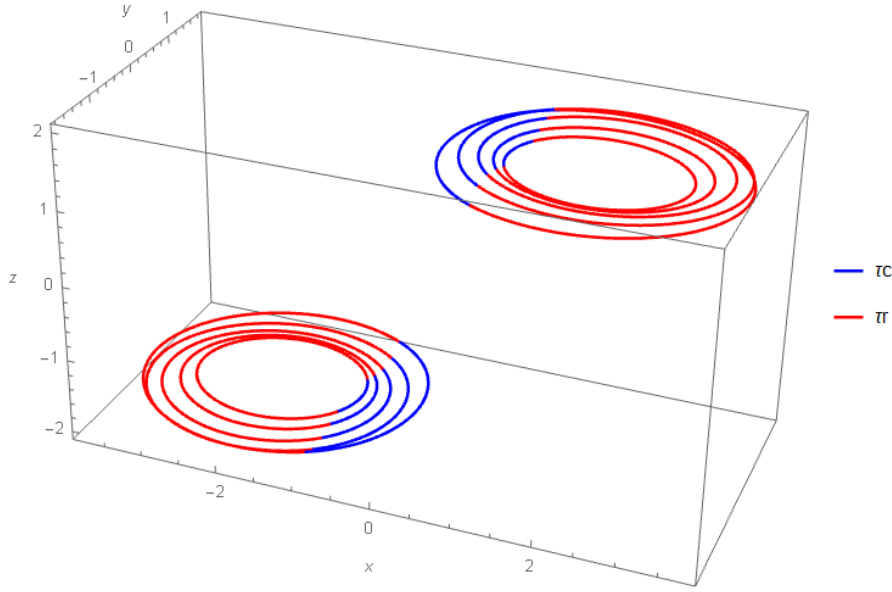


Figura 5.21: *Ciclos Límites obtenidos para $\alpha=0.95$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límite atraviesan las dos zonas del sistema.*

A partir de los puntos de Silla-Nodo obtenidos producidos por la bifurcación Hopf Zero, añadimos la ecuación de Silla-Nodo a las ecuaciones de cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha - \gamma)$.

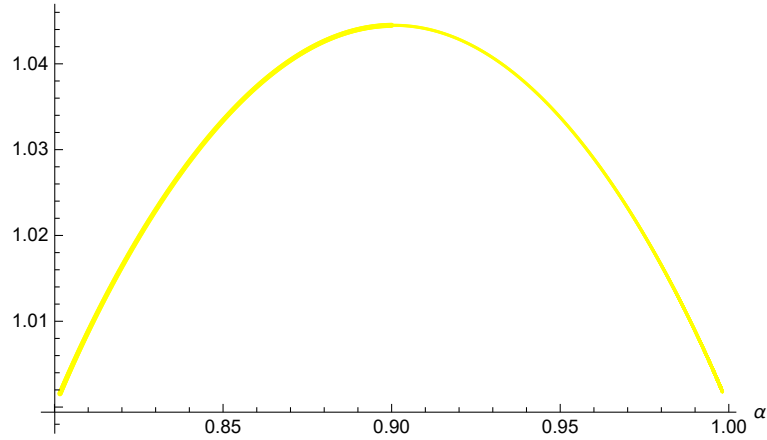


Figura 5.22: *Continuación numérica del ciclo límite bizonal producido por la bifurcación Hopf Zero.*

4. Para $\alpha=0.9$ y γ ligeramente por debajo de $\gamma = \alpha + \beta$. En las figuras (5.23) y (5.24) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=0.9$ en función de γ :

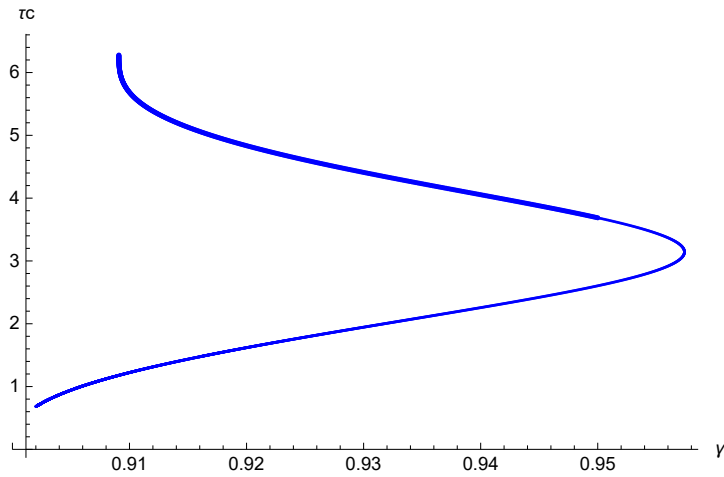


Figura 5.23: *Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 0.957)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.*

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES 87

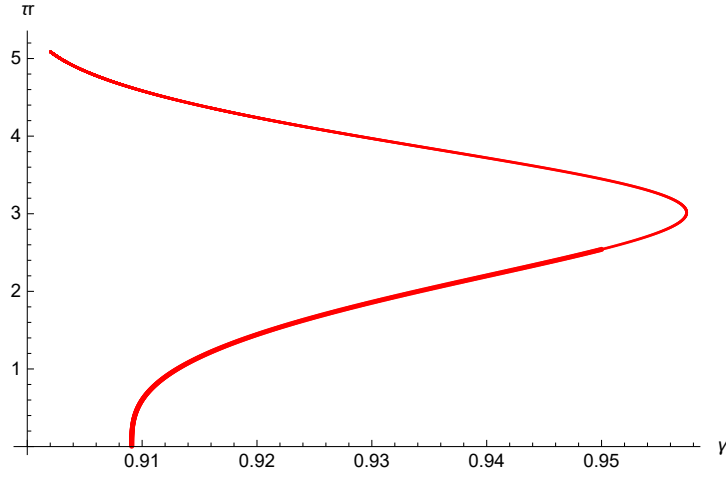


Figura 5.24: *Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=0.9$ en función de γ . El punto de Silla-Nodo $(\alpha, \gamma)=(0.9, 0.957)$ es producido debido a la bifurcación Hopf Zero del origen.*

Como se ha comentado anteriormente, al tratarse de un ciclo límite bizonal, se tiene que cumplir la condición $c) \gamma < 1.1 - \gamma$, condición que numéricamente se ha comprobado que se cumple para todos los valores de γ obtenidos durante el cálculo de los tiempos de vuelo.

En la figura (5.25) se han representado los ciclos límite obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

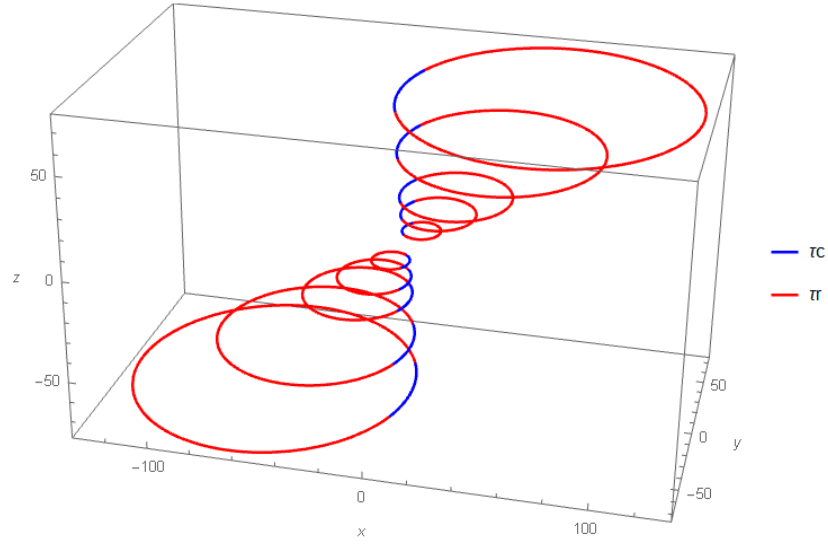


Figura 5.25: Ciclos Límites obtenidos para $\alpha=0.9$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límite atraviesan las dos zonas del sistema.

A partir de los puntos de Silla-Nodo obtenidos producidos por la bifurcación Hopf Zero, añadimos la ecuación de Silla-Nodo a las ecuaciones de cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha - \gamma)$.

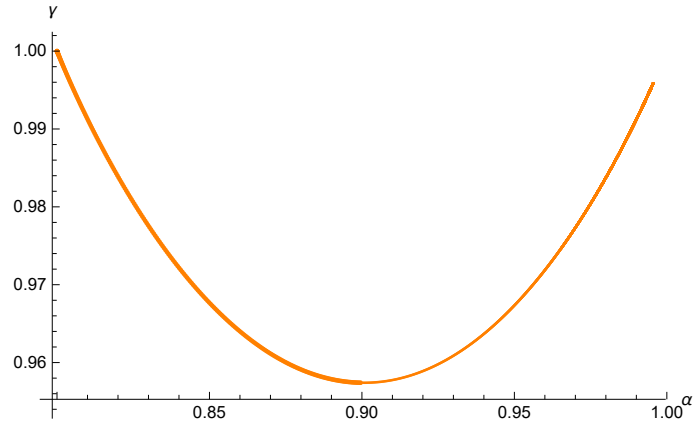


Figura 5.26: Continuación numérica del ciclo límite bizonal producido por la bifurcación Hopf Zero.

5.2.2. Curva Duplicación de Periodo correspondiente a ciclos límite bizonales

Para estudiar este tipo de curva de bifurcación utilizamos el mismo procedimiento empleado en las curvas de bifurcación Silla-Nodo. En este caso, la zona a estudiar corresponde a la vertical de $\alpha=1.2$ y con γ ligeramente por debajo de la curva $\gamma = \alpha + \beta$. En esta zona se continuará un ciclo límite de dos zonas correspondiente a la bifurcación Hopf Zero que se produce sobre $\gamma = \alpha + \beta$. Manteniendo constante el valor de α , variamos el valor de γ hasta detectar un punto de bifurcación. Dicho punto es debido a un cambio del valor de los autovalores del producto M en el que uno de ellos cruza el círculo unidad por la parte negativa del eje real.

En las figuras (5.27) y (5.28) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=1.2$ en función de γ :

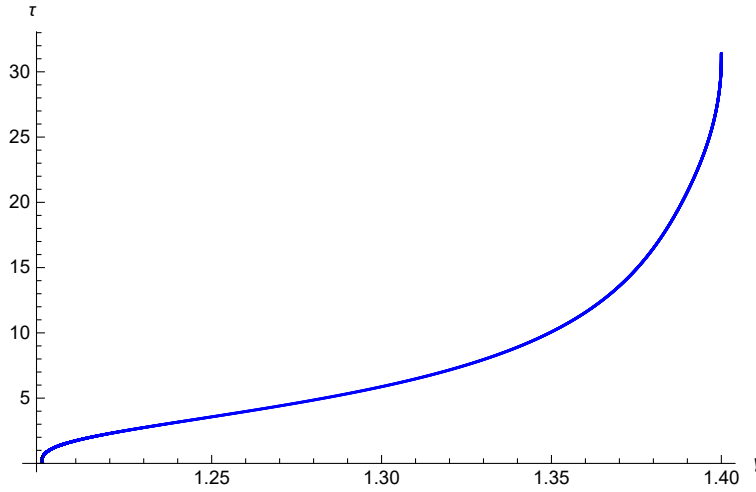


Figura 5.27: Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=1.2$ en función de γ .

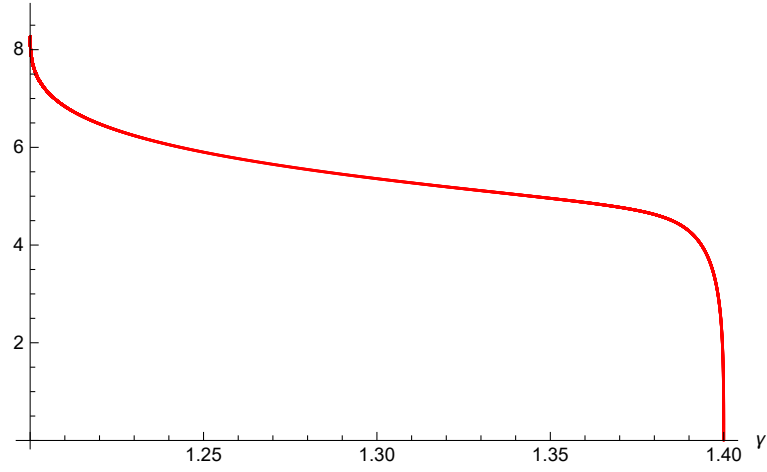


Figura 5.28: *Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=1.2$ en función de γ .*

En la figura (5.29) se han representado los ciclos límites obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

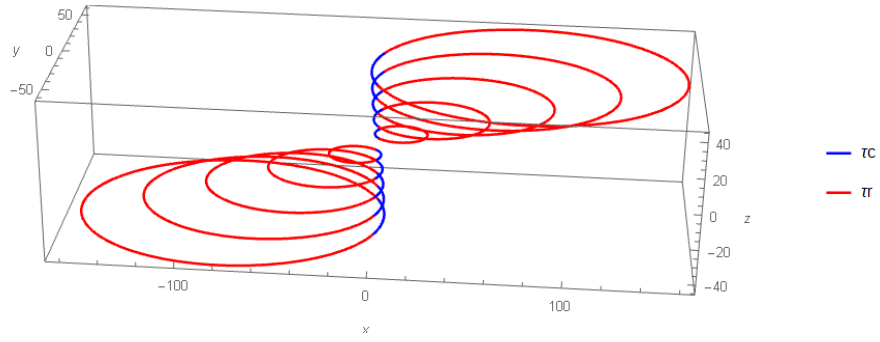


Figura 5.29: *Ciclos Límite obtenidos para $\alpha=1.2$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límites atraviesan las dos zonas del sistema.*

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES 91

Añadiendo la ecuación de la curva Duplicación de Periodo a las ecuaciones del cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha - \gamma)$.

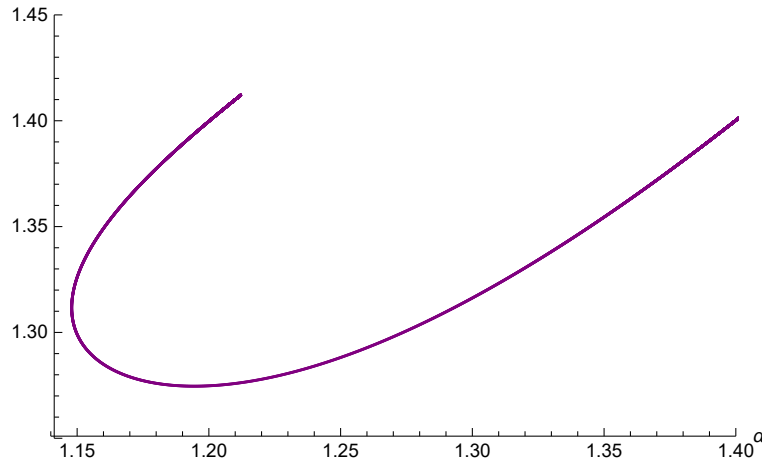


Figura 5.30: *Continuación numérica del ciclo límite bizonal producido por la curva Duplicación de Periodo.*

5.2.3. Curva Bifurcación Toro correspondiente a ciclos límite bizonales

Para este tipo de curva de bifurcación la zona a estudiar corresponde a la vertical de $\alpha=1.1$ y con γ ligeramente por debajo de la curva $\gamma = \alpha + \beta$. En esta zona se continuará un ciclo límite de dos zonas correspondiente a la bifurcación Hopf Zero que se produce sobre $\gamma = \alpha + \beta$. Manteniendo constante el valor de α , variamos el valor de γ hasta detectar un punto de bifurcación. Dicho punto es debido a un cambio del valor de los autovalores del producto M en el que dos de ellos cruzan el círculo unidad.

En las figuras (5.31) y (5.32) se ha representado la evolución de los tiempos de vuelo correspondientes a $\alpha=1.1$ en función de γ :

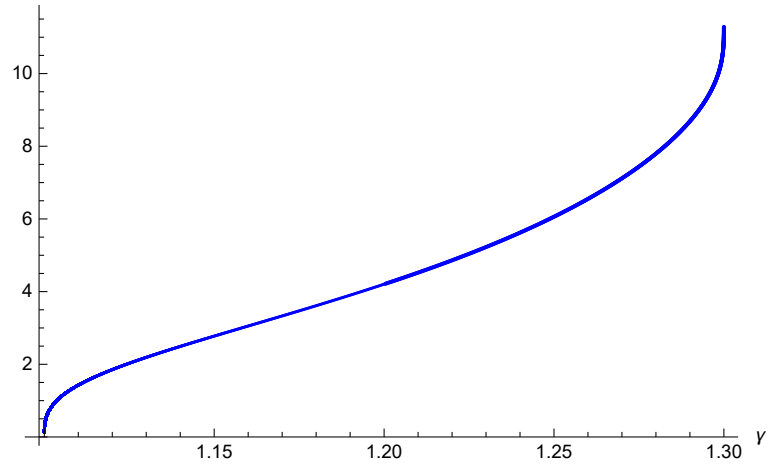


Figura 5.31: *Evolución del tiempo de vuelo central τ_C para $\alpha=1.1$ en función de γ .*

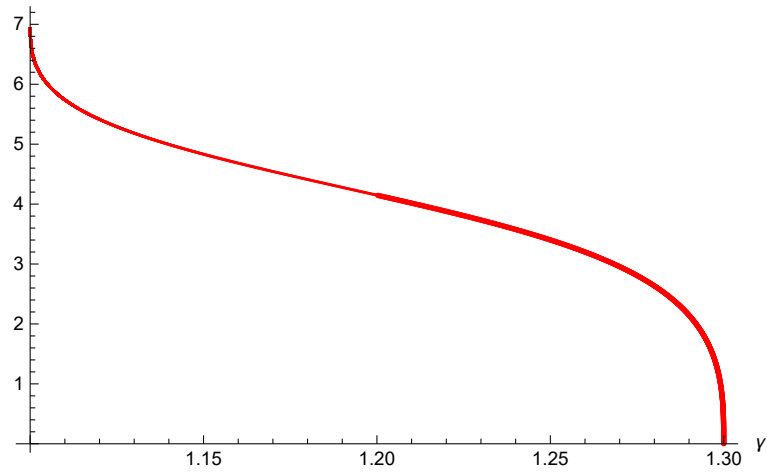


Figura 5.32: *Evolución del tiempo de vuelo externo τ_R para $\alpha=1.1$ en función de γ .*

En la figura (5.33) se han representado los ciclos límite obtenidos para diversos valores de los tiempos de vuelo τ_C y τ_R :

5.2. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE CICLOS LÍMITE BIZONALES 93

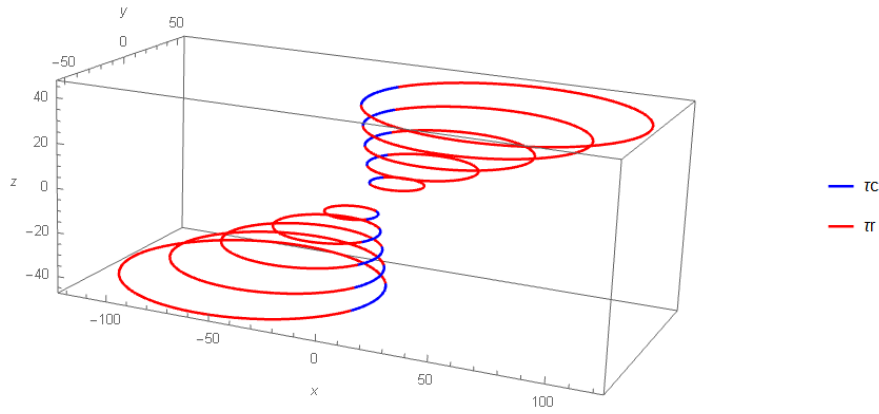


Figura 5.33: *Ciclos Límite obtenidos para $\alpha=1.1$ para diversos valores de τ_C y τ_R . Los ciclos límite atraviesan las dos zonas del sistema.*

Añadiendo la ecuación de la curva Bifurcación Toro a las ecuaciones del cierre del sistema y representamos la curva de continuación en el plano $(\alpha-\gamma)$.

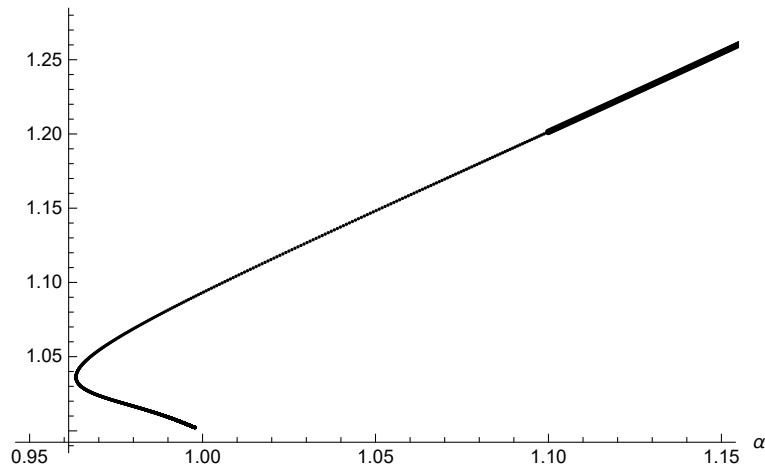


Figura 5.34: *Continuación numérica del ciclo límite bizonal producido por la curva de Bifurcación Toro.*

5.3. Análisis de las curvas de continuación numérica obtenidas

En este apartado se van a analizar las curvas de continuación numérica de ciclos límite trizonales y bizonales. En la figura (5.35) se encuentran representadas todas las curvas obtenidas mediante continuación numérica en el plano $(\alpha - \gamma)$.

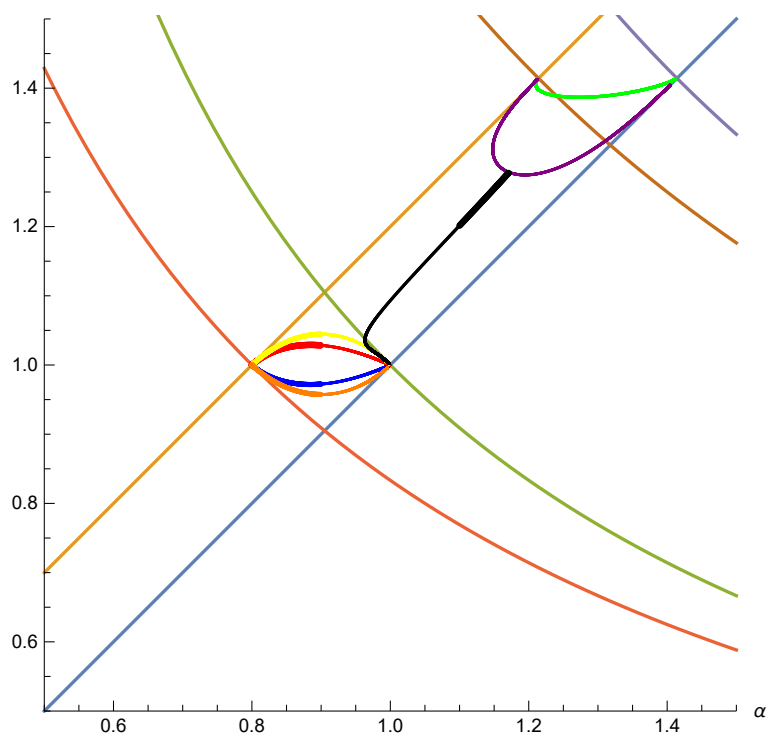


Figura 5.35: Diagrama de bifurcaciones ampliado. Las curvas Silla-Nodo de color rojo, azul y verde corresponden a la continuación numérica de ciclos límites trizonales, y las curvas Silla-Nodo de color naranja y amarillo a ciclos límite bizonales. La curva de color morado corresponde a la curva de Duplicación de Periodo y la curva de color negro a la curva de Bifurcación Toro, ambas de ciclos límite bizonales.

En la figura (5.36) se ha indicado el número de ciclos límites presentes en la zona del plano $(\alpha - \gamma)$ para $\alpha \in [0.80, 1]$ y $\gamma \in [0.90, 1.10]$:

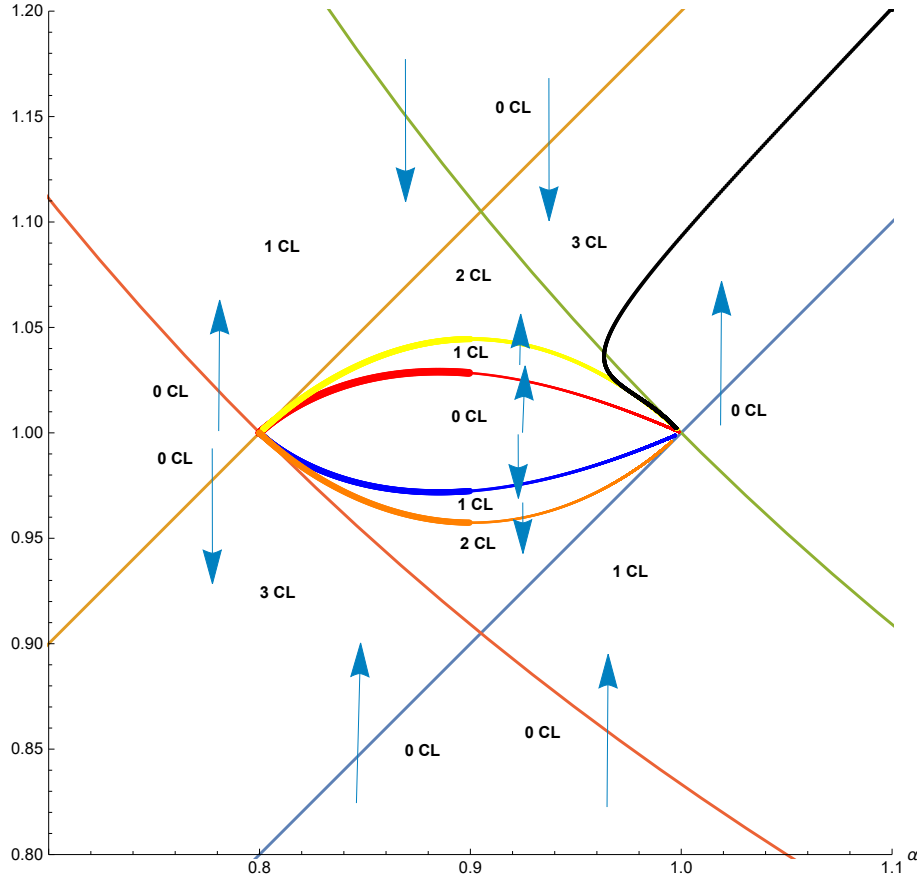


Figura 5.36: *Diagrama de bifurcaciones ampliado.*

En la zona del plano que aparece la etiqueta “2CL” se produce tanto un ciclo límite bizonal como un ciclo límite trizonal. Estos ciclos límite se deben a la bifurcación Hopf Zero del origen o bifurcación FCCL y a la bifurcación Hopf del infinito o la bifurcación Hopf Zero del infinito.

En cambio, la etiqueta “1CL” corresponde a un ciclo límite trizonal, el cual está producido por la bifurcación Hopf Zero del origen o bifurcación FCCL.

En la figura (5.37) se ha indicado el número de ciclos límites presentes en la zona del plano $(\alpha - \gamma)$ para $\alpha \in [1, 1.50]$ y $\gamma \in [1.20, 1.55]$: En la zona del

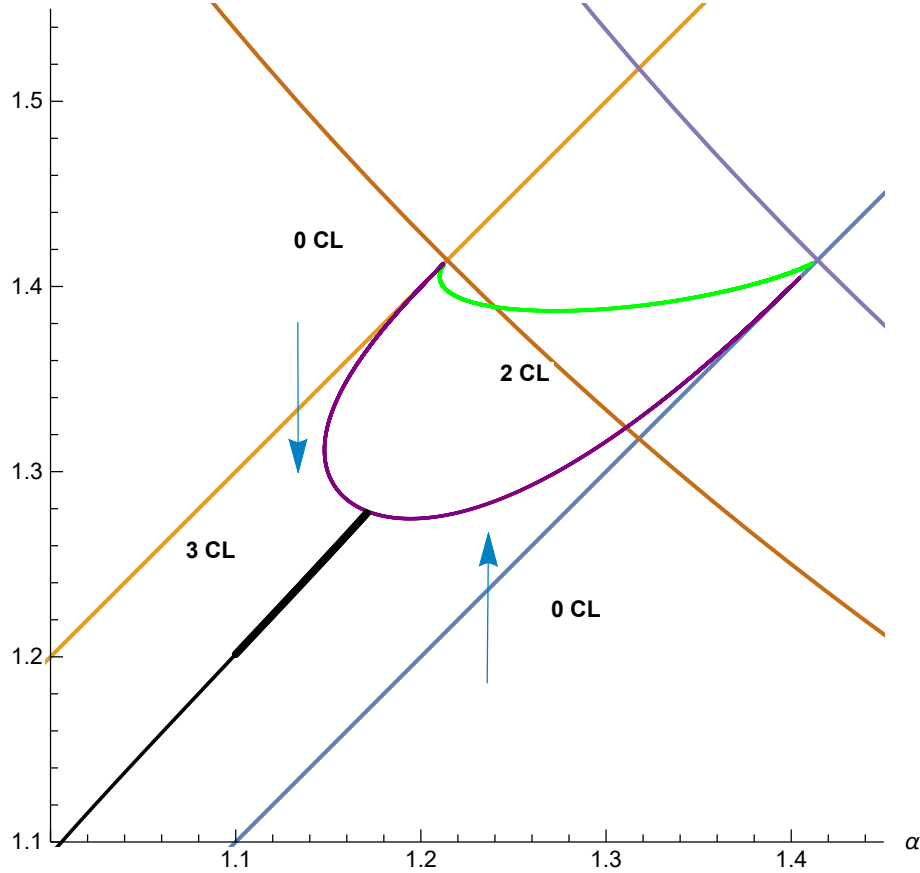


Figura 5.37: *Diagrama de bifurcaciones ampliado.*

plano que aparece la etiqueta “2CL” se produce tanto un ciclo límite bizonal como un ciclo límite trizonal. Estos ciclos límite se deben a la bifurcación Hopf Zero y a la degeneración Triple Zero.

Finalmente, hay que aclarar que el análisis realizado durante este trabajo no comprende todas las posibles curvas de bifurcación posibles, por lo que es importante no trabajar fuera de las zonas no estudiadas del plano $(\alpha - \gamma)$ para poder evitar posibles errores.

Bibliografía

- [1] Ali H. Nayfeh, Balakumar Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*.
- [2] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer.
- [3] Enrique Ponce, Javier Ros, Elisabet Vela. *A Unified Approach to Piecewise Linear Hopf and Hopf-Pitchfork Bifurcations*. Springer, Chapter 12. 2014.
- [4] Enrique Ponce, Javier Ros, Elisabet Vela. *Unfolding the fold-Hopf bifurcation in piecewise linear continuous differential systems with symmetry*. 2013.
- [5] Emilio Freire, Enrique Ponce, Javier Ros. *The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3D piecewise linear systems*. 2005.
- [6] Y. Nishiuchi, T. Ueta, H. Kawakami. *Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit* 2006.
- [7] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, J. Ros, F. Torres. *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones. Application to Chua's circuit*. 2005.
- [8] Javier Ros Padilla. *Estudio del comportamiento dinámico de sistemas autónomos tridimensionales lineales a trozos* 2003.
- [9] Carlos Vallet Burguillos. *Análisis de la dinámica de un oscilador electrónico tipo Bonhoeffer-Van der Pol* 2014.
- [10] Luis Gómez de la Herrán Ramírez. *Continuación numérica de ciclos límites en osciladores electrónicos*. 2016.